



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

# **Desenvolvimento de formulações de elementos finitos para barras sujeitas a cargas transitórias**

Carol Rodrigues Correia

Licenciada

Dissertação para obtenção de Grau de Mestre em  
Engenharia Civil- Estruturas e Geotecnia

Orientador: Prof. Doutor Dragos Ionut Moldovan

Júri:

Presidente: Prof. Doutor José Nuno Varandas da Silva Ferreira

Arguente: Prof. Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves

Vogal: Prof. Doutor Dragos Ionut Moldovan

**Junho 2015**







“Copyright” Carol Rodrigues Correia, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

Gostaria de expressar o meu mais sincero agradecimento ao meu orientador professor Doutor Dragos Ionut Moldovan por todos os conhecimentos transmitidos, permanente apoio, permanente acompanhamento e sobretudo pela paciência e disponibilidade.

Agradeço ainda aos meus pais, irmãos e amigos pelo apoio e compreensão durante a elaboração deste trabalho. Acima de tudo agradeço a Deus por tudo.





# Resumo

Com o presente trabalho pretende-se formular, implementar e validar duas classes de elementos finitos não-convencionais para problemas elastoestáticos e elastodinâmicos (harmônicos e transitórios) envolvendo barras solicitadas por cargas axiais. O desempenho numérico dos elementos não convencionais é estudado para uma larga gama de situações de interesse prático e comparado com o dos elementos finitos conformes de deslocamento (convencionais).

A resolução de problemas transitórios envolve a integração no tempo e no espaço das equações diferenciais governativas, bem como a imposição das respectivas condições iniciais e de fronteira. A metodologia de integração no tempo adotada neste trabalho é baseada no método de Newmark. A resolução de problemas estáticos e harmônicos não carece de integração no tempo, ou a mesma é feita de forma trivial.

Concluída a discretização no tempo, a segunda fase da resolução envolve a integração no espaço de cada uma das equações discretizadas, nomeadamente através do método dos elementos finitos. Para esse efeito, apresentam-se as formulações relativas aos elementos finitos convencionais, híbridos e híbridos-Trefftz. As três formulações têm como ponto de partida a forma fraca da equação diferencial de Navier, que é imposta utilizando o método de Galerkin. A principal diferença entre os elementos convencionais e não-convencionais prende-se com a maneira como são impostas as condições de fronteira de Dirichlet e as condições de compatibilidade nas fronteiras interiores.

Os elementos não convencionais são implementados numa plataforma computacional desenvolvida de raiz no ambiente Matlab. A implementação é feita de maneira a permitir uma definição muito geral e flexível da estrutura e das respectivas ações, bem como das discretizações no tempo e no espaço e das bases de aproximação, que podem ser diferentes para cada elemento finito.

Por fim, efetuam-se testes numéricos com o objetivo de analisar os resultados obtidos com os elementos não convencionais e de os comparar com as respectivas soluções analíticas (caso existam), ou com os resultados obtidos utilizando elementos convencionais. É especialmente focada a convergência das soluções aproximadas sob refinamentos da malha ( $h$ ), no espaço e no tempo, e das funções de aproximação ( $p$ ),

sendo que o uso simultâneo dos dois refinamentos parece conduzir mais rapidamente a soluções próximas da solução exata. Analisam-se também problemas complexos, envolvendo propagação de ondas de choque, com o fim de se efetuar uma comparação entre os elementos convencionais, disponíveis no programa comercial SAP2000, e os elementos não convencionais fornecidos pela plataforma computacional desenvolvida neste trabalho.

## Palavras-chave

Elemento finito de barra

Problemas transitórios

Elementos finitos híbridos

Elementos finitos híbridos-Trefftz

Método de Newmark

Elementos finitos convencionais

# Abstract

This work reports on the formulation, implementation and validation of two classes of non-conventional finite elements for elastostatic and elastodynamic (harmonic and transient) problems defined on axially loaded bars. The numerical performance of the non-conventional elements is studied for a considerable breadth of practical situations and compared to that of conventional (conforming displacement) finite elements applied to the same problems.

The solution of transient problems involves their integration in time and space and the enforcement of the initial and boundary conditions, respectively. The integration in time is performed here using the well-known Newmark method. The solution of static and harmonic problems either does not require time integration, or the time integration process is trivial.

Each of the time-discretized problems is subsequently integrated in space using the finite element method. Three finite element formulations are presented, namely the conforming displacement element, the hybrid formulation and the hybrid-Trefftz formulation. All three formulations are derived by enforcing the weak form of the governing equations using a Galerkin weighted residual approach. Conforming displacement and hybrid finite elements differ in the way the Dirichlet and inter-element compatibility conditions are enforced.

The non-conventional elements are implemented in a computational framework specially developed for this purpose in Matlab environment. The implementation offers considerable flexibility for the definition of the structure and its loads, with the only constraint of the latter having analytic expression. Also flexible is the definition of the time step, finite element mesh and approximation bases, which must not be the same for all elements.

Numerical tests are conducted in order to assess the behaviour of non-conventional elements and to compare their results with analytic solutions (where available), or with similar results obtained with conventional finite elements. The convergence of the solutions under mesh ( $h$ ) refinement, in both space and time, and approximation basis ( $p$ ) refinement is quantified. It is concluded that best results are obtained when  $h$  and  $p$

refinements are conducted simultaneously. Finally, more complex, shock wave propagation problems are solved using hybrid, hybrid-Trefftz and conventional finite elements in order to compare their relative performance.

## Keywords

Bar finite element

Transient problems

Hybrid finite element

Hybrid-Trefftz finite element

Newmark method

Conventional finite element

# Índice de Matérias

<b>Copyright</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Enquadramento.....	1
1.2 Objetivos .....	3
1.3 Formulações de elementos finitos não convencionais.....	5
1.4 Estado da arte .....	7
1.5 Organização do texto .....	8
<b>2 Descrição do problema</b>	<b>11</b>
2.1 Introdução .....	11
2.2 Descrição do problema .....	11
2.2.1 Equações no domínio .....	12
2.2.2 Equações na fronteira.....	13
2.2.3 Condições iniciais do problema.....	14
<b>3 Formulações de elementos finitos</b>	<b>17</b>
3.1 Introdução .....	17
3.2 Integração no tempo .....	18
3.2.1 Método de Newmark.....	19
3.2.2 Estabilidade do método de Newmark .....	21
3.2.3 Equações discretizadas .....	22
3.3 Integração no espaço .....	24
3.3.1 Forma fraca das equações governativas .....	24
3.3.2 Princípios fundamentais dos elementos finitos .....	25
3.3.3 Elementos finitos conformes de deslocamento .....	27
3.3.4 Elementos finitos híbridos.....	32
3.3.5 Elementos finitos híbridos-Trefftz.....	36
<b>4 Implementação computacional</b>	<b>39</b>
4.1 Introdução .....	39
4.2 Estrutura do programa .....	40
4.2.1 Dados de input .....	40
4.2.2 Estruturas de dados .....	41

4.3	Cálculo dos elementos do sistema resolvente .....	44
4.3.1	Integração numérica .....	44
4.3.2	Construção do sistema resolvente .....	48
4.4	Pós-processamento .....	49
<b>5</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>51</b>
5.1	Introdução .....	51
5.2	Problema estático .....	52
5.2.1	CrITÉrios de convergência e qualidade da solução .....	52
5.2.2	Definição do problema .....	57
5.2.3	Resultados .....	59
5.3	Problema harmónico .....	64
5.3.1	Definição do problema .....	65
5.3.2	Resultados .....	66
5.4	Problema transitório .....	73
5.4.1	Problema analítico .....	74
5.4.2	Propagação de ondas de choque .....	84
<b>6</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>93</b>
6.1	Conclusões .....	93
6.2	Desenvolvimentos futuros .....	94
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Exemplo de aplicação dos elementos convencionais</b>	<b>101</b>
<b>B</b>	<b>Exemplo de aplicação dos elementos híbridos</b>	<b>107</b>
<b>C</b>	<b>Exemplo de aplicação dos elementos híbridos-Trefftz</b>	<b>111</b>

# Índice de Figuras

1.1: Processo de modelação e análise estrutural [1] .....	2
2.1: Barra solicitada axialmente .....	12
2.2: Representação da normal unitária e das forças aplicadas nas extremidades da barra .....	14
3.1: Aceleração linear dentro do passo de tempo .....	20
3.2: Estabilidade do método de Newmark .....	22
3.3: Barra solicitada axialmente .....	24
3.4: Discretização de uma barra, utilizando elementos finitos .....	26
3.5: Deslocamento dos nós de um elemento finito .....	28
3.6: Funções da base linear de um elemento finito convencional .....	29
3.7: Elemento sujeito a carga axial de vão e a forças nodais .....	30
3.8: Barra solicitada axialmente com vários elementos .....	31
3.9: Monómios $x^n$ .....	33
3.10: Polinómios de Chebyshev, de $T_0(x)$ a $T_5(x)$ .....	34
4.1: Exemplo para demonstrar as estruturas de dados .....	43
4.2: Abcissas e pesos de Gauss .....	45
4.3: Mudança de referencial .....	46
4.4: Pontos de inserção e dimensões dos elementos e nós na matriz dos coeficientes ...	48
5.1: Exemplo de refinamento de malha .....	54
5.2: Taxa de convergência, $k$ .....	56
5.3: Problema estático .....	57
5.4: Solução analítica dos deslocamentos (-.-.-) e das tensões (---) para o problema estático .....	58
5.5: Resultados aproximados dos deslocamentos e das tensões utilizando refinamentos $h$ e $p$ .....	62
5.6: Convergência da solução dos deslocamentos sob refinamentos $p$ e $h$ .....	63
5.7: Problema espectral .....	65
5.8: Soluções analíticas dos deslocamentos e das tensões para o problema harmónico .	66

5.9: Relação entre o número de elementos por comprimento de onda e o grau das funções de aproximação .....	68
5.10: Aproximações dos deslocamentos e das tensões utilizando refinamentos $h$ e $p$ ...	71
5.11: Convergência da solução dos deslocamentos sob refinamentos $p$ e $h$ .....	73
5.12: Problema analítico.....	75
5.13: Soluções analíticas de deslocamentos (vermelho) e de tensões (azul) .....	76
5.14: Convergência da solução dos deslocamentos sob refinamentos $p$ e $h$ para $a=2$ ....	78
5.15: Convergência da solução dos deslocamentos sob refinamentos $p$ e $h$ para $a=5$ ....	79
5.16: Convergência da solução de deslocamentos sob refinamentos $p$ e $h$ para $a=10$ ....	80
5.17: Evolução no tempo dos deslocamentos em $x=0$ .....	82
5.18: Evolução no tempo das tensões em $x=0$ .....	83
5.19: Problema de choque .....	84
5.20: Casos de carregamento no problema de choque .....	85
5.21: Campos de tensões para o caso 1 de carregamento .....	88
5.22: Campos de tensões para o caso 2 de carregamento .....	91
A.1: Exemplo de aplicação.....	101
A.2: Campos de deslocamentos e tensões analíticos .....	102
A.3: Discretização em elementos finitos.....	103
A.4: Soluções aproximadas e exatas utilizando elementos convencionais .....	106
B.1: Deslocamentos e tensões utilizando elementos finitos híbridos .....	110
C.1: Deslocamentos e tensões utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz .....	115



# Índice de Tabelas

3.1: Comparação entre os elementos finitos convencionais e híbridos .....	35
5.1: Vantagens e desvantagens dos refinamentos $h$ e $p$ , nos elementos convencionais..	55
5.2: Erros relativos .....	67



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Enquadramento

Para poderem compreender melhor problemas físicos reais, de elevada complexidade, os Engenheiros recorrem frequentemente a modelos matemáticos, tipicamente baseados em equações diferenciais (Figura 1.1). Um problema físico real envolve uma estrutura com geometria e material de características simples ou complexas, sujeita a determinadas cargas e condições de fronteira. Os modelos matemáticos são obtidos a partir de um conjunto de hipóteses simplificadoras, pelo que um determinado problema físico tem, tipicamente, representações matemáticas múltiplas, de diferentes graus de complexidade. Essas simplificações incidem tipicamente sobre o comportamento da estrutura (por exemplo, leis constitutivas, magnitude dos deslocamentos e deformações), a qualidade da construção (como eliminação ou não das imperfeições construtivas) e os efeitos locais (tais como estado de fendilhação, cargas concentradas). Além disso, as expressões analíticas utilizadas para definir as cargas aplicadas e os deslocamentos associados aos apoios da estrutura são também idealizações que se devem ter em conta aquando da escolha do modelo matemático a utilizar.

Muitas vezes, as equações que constituem o modelo matemático não possuem soluções analíticas que respeitem as condições iniciais e de fronteira e, por esse motivo, surgiu a necessidade da aplicação de métodos de resolução aproximados. Entre as várias alternativas, o método dos elementos finitos é o método mais utilizado na Engenharia Estrutural para obter soluções aproximadas de problemas definidos por equações diferenciais. Por ser um método aproximado, a sua aplicação conduz à necessidade da avaliação da precisão da solução obtida. Essa avaliação pode ser feita verificando o equilíbrio e a compatibilidade da solução ou comparando a solução com outras soluções obtidas com outros refinamentos. Caso os critérios de precisão não sejam respeitados, deve-se repetir a análise refinando os parâmetros da solução até se atingir a precisão desejada. Depois de obtidos e interpretados os resultados, torna-se necessário verificar

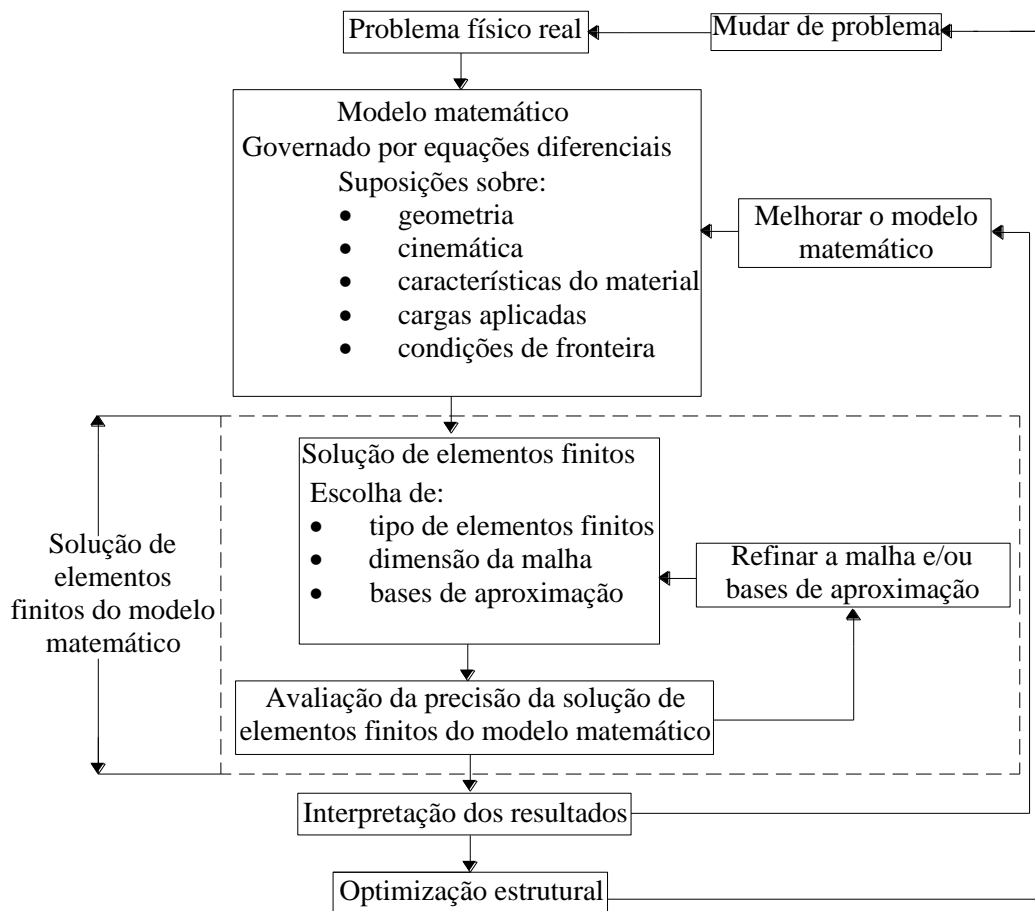


Figura 1.1: Processo de modelação e análise estrutural [1]

se as hipóteses simplificativas utilizadas na idealização do modelo matemático são, de facto, válidas. Se os resultados obtidos não forem coerentes com as hipóteses simplificativas (por exemplo, na sequência de uma análise linear, a tensão ultrapassa a tensão de cedência) e se a alteração do modelo matemático acrescenta informação adicional relevante à análise, procede-se à mudança do modelo matemático e à repetição do processo. Por outro lado, na sequência da análise dos resultados da análise computacional, pode ser necessária a alteração das dimensões, forma ou topologia da estrutura, que levam à alteração do problema físico real e conduzem, assim, a novos modelos de elementos finitos (ver Figura 1.1).

O conceito do método dos elementos finitos é de subdividir a estrutura num número de subdomínios (chamados elementos) nos quais as soluções são aproximadas através de combinações lineares de funções simples. Os fatores de participação destas funções na solução de cada elemento são obtidos através da imposição das equações governativas e das respetivas condições de fronteira da estrutura. Este procedimento transforma o

problema formulado através de equações diferenciais num problema de álgebra linear facilmente solucionável. Pela considerável liberdade na discretização do domínio e na escolha das funções de aproximação, o método dos elementos finitos pode ser utilizado para resolver praticamente qualquer problema representado matematicamente por equações às derivadas parciais, com quaisquer condições de fronteira. Por outro lado, encontrar o melhor compromisso entre a qualidade da aproximação, controlada através do refinamento da malha de elementos e das bases de aproximação, e a eficiência computacional nem sempre é trivial e pode colocar dificuldades a utilizadores inexperientes.

## **1.2 Objetivos**

Os elementos finitos conformes de deslocamentos (também designados aqui por elementos convencionais) são atualmente os elementos finitos mais utilizados para obter soluções aproximadas de equações diferenciais. No caso particular de problemas mecânicos, os elementos convencionais aproximam o campo de deslocamentos no interior do elemento utilizando funções de aproximação que satisfazem as condições de compatibilidade tanto no interior do elemento como nas fronteiras que o separam dos elementos adjacentes e do meio exterior. No entanto, os elementos convencionais apresentam algumas limitações, entre as quais porventura a mais importante prende-se com o facto de as soluções aproximadas não respeitarem as condições de equilíbrio no domínio e nas fronteiras entre os elementos. Por consequência, a precisão na estimativa das tensões é muito mais reduzida do que na dos deslocamentos. Esta limitação é especialmente relevante na fase de dimensionamento estrutural, visto que são, tipicamente, as tensões, e não os deslocamentos, que condicionam o projeto de uma estrutura. Ademais, os elementos finitos convencionais que usam bases lineares para aproximar os campos de deslocamentos no interior do elemento são pouco adequados para a modelação de problemas dinâmicos transitórios devido à sua sensibilidade aos comprimentos de onda presentes na resposta da estrutura. Assim, é geralmente recomendada a utilização de, no mínimo, dez elementos conformes por comprimento de onda, que pode ser muito reduzido (e desconhecido a priori) em problemas transitórios.

Estes e outros motivos (detalhados na Secção 3.3.3) levaram ao desenvolvimento de elementos finitos alternativos.

Entre as alternativas para ultrapassar as limitações dos elementos convencionais destacam-se as formulações não convencionais: híbrida-mista, híbrida e híbrida-Trefftz. Estas formulações denominam-se de híbridas porque campos diferentes são aproximados no domínio do elemento e nas suas fronteiras essenciais. Comparando com os elementos convencionais, as principais vantagens comuns a todas as formulações não-convencionais incluem maior flexibilidade na construção da base de aproximação do domínio, maior equilíbrio na precisão das soluções dos campos de deslocamentos e de tensões, e a possibilidade de integrar algumas dessas formulações em programas de elementos finitos convencionais.

O presente trabalho visa desenvolver formulações de elementos finitos não-convencionais, nomeadamente híbridos e híbridos-Trefftz, para a modelação de problemas unidimensionais estáticos e dinâmicos definidos em barras com comportamento elástico-linear. As formulações desenvolvidas são implementadas no ambiente Matlab e o seu comportamento analisado. Para permitir uma comparação mais abrangente, neste trabalho é também apresentada a formulação dos elementos finitos convencionais.

O primeiro passo para o desenvolvimento de formulações de elementos finitos consiste em estabelecer as relações fundamentais que governam o problema sob análise. Depois de estabelecidas as equações diferenciais e as condições iniciais e de fronteira do problema, o segundo passo na derivação da formulação de elementos finitos consta na integração no tempo das equações diferenciais. O processo de discretização no tempo envolve a aplicação de um método de integração que reduza as equações diferenciais governativas para uma série de problemas dependentes apenas de variáveis espaciais. Neste trabalho, a integração no tempo é efetuada utilizando o método de Newmark. O terceiro passo consiste na integração no espaço de cada um desses problemas, utilizando o método dos elementos finitos, nomeadamente elementos finitos convencionais, híbridos e híbridos-Trefftz. Independentemente do tipo dos elementos, os mesmos são obtidos a partir da forma fraca do problema, que é imposta através do método de Galerkin. Através deste procedimento, são obtidos os sistemas governativos de equações algébricas cuja resolução permite a reconstrução de todos os campos no respetivo passo de tempo.

Depois de desenvolvidas as formulações, os elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz são implementados e validados numa plataforma computacional construída de raiz em ambiente Matlab. O programa desenvolvido apresenta grande flexibilidade na definição das características físicas das barras e das condições de fronteira, permitindo também uma fácil definição dos refinamentos da malha e das bases de aproximação em cada elemento. O controlo destes refinamentos permite o estudo da convergência das soluções proporcionadas pelos elementos. Pelo contrário, os programas de elementos convencionais comercialmente disponíveis permitem, tipicamente, apenas o refinamento da malha (também chamado de refinamento  $h$ ).

Em suma, neste trabalho são formulados, implementados e validados elementos híbridos para problemas estáticos, e elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz para problemas harmónicos e transitórios envolvendo barras solicitadas axialmente.

### **1.3 Formulações de elementos finitos não convencionais**

As formulações não-convencionais que serão apresentadas baseiam-se no trabalho que tem vindo a ser desenvolvido pelo grupo de investigação de análise estrutural do Instituto Superior Técnico [2].

Segundo a perspetiva adotada por Freitas [3], os elementos finitos não-convencionais podem ser obtidos utilizando três formulações: híbrida-mista, híbrida e híbrida-Trefftz [4]. Para cada formulação, podem ser derivados dois modelos: modelo de deslocamentos e modelo de tensões [5], [6] .

As formulações e modelos abordados são derivados das equações de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade no domínio (que juntas originam a equação de Navier), e das condições de fronteira de Dirichlet e Neumann. No caso de problemas transitórios, a estas equações juntam-se ainda as condições iniciais, em cada passo de tempo.

As três formulações distinguem-se pelas restrições colocadas nas funções de aproximação na base do domínio, ou seja, pelas equações (de equilíbrio, compatibilidade ou elasticidade) que as funções de aproximação devem satisfazer localmente no domínio de cada elemento. A formulação híbrida-mista é a mais flexível em termos da escolha das funções de aproximação visto que não são colocadas restrições nas mesmas e todas as

condições de domínio e de fronteira são impostas em forma fraca. No entanto, o número de graus de liberdade necessário para obter soluções razoáveis é bastante elevado, conduzindo assim a sistemas resolutivos bastante grandes.

Por sua vez, a formulação híbrida procede da formulação híbrida-mista, sendo que as funções de aproximação na base do domínio são condicionadas a satisfazer localmente a equação de compatibilidade (elemento de deslocamento) ou a equação de equilíbrio (elemento de tensão). Contudo, o número de graus de liberdade necessário para atingir a mesma precisão das soluções é consideravelmente mais baixo do que na formulação híbrida-mista.

A formulação híbrida-Trefftz deriva da formulação híbrida, sendo que as funções de aproximação na base domínio são condicionadas a satisfazer a forma homogênea da equação de Navier. Por consequência, essas funções incluem características físicas das estruturas a analisar, e são específicas a cada problema que se está a resolver. Os elementos híbridos-Trefftz apresentam convergência muito elevada sob refinamento da base de aproximação e são praticamente insensíveis a baixos comprimentos de onda em problemas dinâmicos. Como desvantagem têm o elevado esforço computacional que o cálculo das funções de aproximação acarreta e o facto de a sua integração analítica não ser, geralmente, possível.

Nas formulações híbridas, os modelos de deslocamento e de tensões distinguem-se pela condição de fronteira explicitamente imposta. Os modelos de deslocamento estão focados na obtenção de soluções que satisfaçam as condições de fronteira de Dirichlet e a continuidade dos deslocamentos nas fronteiras inter-elementares. Estas condições são impostas separadamente das condições no domínio, em forma fraca, utilizando as aproximações das forças nas respetivas fronteiras como funções de peso. Por sua vez, os modelos de tensão estão focados na obtenção de soluções que satisfaçam as condições de fronteira de Neumann e a continuidade das tensões nas fronteiras inter-elementares. Estas condições são impostas em forma fraca, recorrendo à aproximação dos deslocamentos nas respetivas fronteiras como funções de peso.



## 1.4 Estado da arte

Todas as variantes não-convencionais do método dos elementos finitos devem-se ao trabalho pioneiro de Veubeke [7] e Pian [8]. O delinear e caracterização das três classes de elementos não-convencionais, nomeadamente os elementos híbridos-mistos, híbridos e híbridos-Trefftz, deve-se a contribuições posteriores de Jirousek [9], Brezzi e Fortin [10] e Freitas [4]. Os trabalhos destes e outros investigadores, por exemplo [11] e [12], contribuíram para o desenvolvimento de métodos dos elementos finitos não convencionais para problemas elastoestáticos.

Problemas envolvendo estados planos de deformação em materiais monofásicos com comportamento elástico-linear foram resolvidos utilizando elementos híbridos-Trefftz por Freitas [13]. Ao mesmo tempo, Freitas e Cismasiu [14] modelaram campos de tensões singulares utilizando elementos híbridos-Trefftz enriquecidos com funções de aproximação desenvolvidas especialmente para modelar com precisão os respetivos efeitos. De seguida, formulações híbridas-Trefftz foram aplicadas a problemas elastoestáticos tridimensionais [15], e posteriormente a problemas definidos em materiais elasto-plásticos [16].

As formulações híbridas foram empregues a problemas elastodinâmicos por Freitas e Wang [17]. Por sua vez, Freitas e Cismasiu [18] formularam elementos híbridos-Trefftz de deslocamentos para problemas harmónicos no tempo.

Utilizando uma nova técnica de integração no tempo proposta por Freitas [19], os elementos híbridos-Trefftz de tensões e de deslocamentos, anteriormente desenvolvidos para problemas harmónicos, foram estendidos à análise estática [20], [21] e à análise dinâmica transitória de meios porosos com deformações planas [22], [23]. Foi assim possível utilizar a mesma formulação de elementos finitos no espaço para problemas harmónicos, periódicos e transitórios. As formulações híbridas foram posteriormente estendidas a materiais multifásicos [24].

No que toca à melhoria das soluções através dos refinamentos de malha ( $h$ ) e bases de aproximação ( $p$ ), as origens da sua utilização devem-se ao trabalho pioneiro de Babusca e Guo [25], que mostraram que as soluções obtidas pelo método dos elementos finitos, utilizando elementos híbridos com funções polinomiais na base do domínio, convergem exponencialmente quando são refinadas utilizando uma combinação adequada dos dois

tipos de refinamento. Relativamente à implementação computacional, as estimativas do erro e a convergência sob refinamento automático foram analisadas em [26]. Finalmente, a aplicação de técnicas de processamento paralelo utilizando elementos não convencionais foi estudada por Cismasiu e Almeida [27].

## 1.5 Organização do texto

O texto que se segue está dividido em cinco capítulos.

No Capítulo 2 é feita a descrição geral do problema unidimensional envolvendo barras solicitadas axialmente por cargas transitórias. São descritas, para o caso geral, as equações governativas, as condições de fronteira e as condições iniciais do problema.

O Capítulo 3 está dividido em duas partes. Na primeira parte são apresentados, de uma maneira breve, alguns métodos de integração no tempo para permitir uma localização do método adotado neste trabalho no contexto geral. É depois focado o método de Newmark, que é o método de integração no tempo utilizado neste trabalho, sendo assim determinada a equação governativa discretizada para cada passo de tempo.

A segunda parte do Capítulo 3 aborda a integração no espaço dos problemas discretizados no tempo. Primeiramente, é deduzida a forma fraca do problema, que é posteriormente utilizada para derivar as formulações do método dos elementos finitos através da aplicação do método de Galerkin, que adota as mesmas funções para a aproximação dos campos no domínio do elemento e para a imposição da forma fraca. A partir da forma fraca são definidas as equações que regem os elementos finitos convencionais e os elementos finitos híbridos.

No Capítulo 4, é feita uma descrição dos aspetos relevantes da implementação numérica das formulações na plataforma computacional desenvolvida. Este capítulo serve também de guia de utilização para investigadores que pretendam utilizar a plataforma computacional como base para futuras adaptações.

Por fim, no Capítulo 5 são realizados testes numéricos envolvendo problemas estáticos, harmónicos e transitórios. É feita uma avaliação da convergência das soluções de elementos finitos analisando os erros obtidos com diversos graus de refinamentos  $p$  e  $h$ , e são feitas comparações entre os resultados obtidos utilizando os elementos finitos não convencionais e as respetivas soluções analíticas dos problemas. Também neste capítulo

é feita uma comparação entre os elementos finitos convencionais e não convencionais, mediante os resultados obtidos no programa comercial SAP2000 e na plataforma computacional desenvolvida, respetivamente.

Para facilitar a compreensão das metodologias utilizadas, nos anexos A, B e C é resolvido explicitamente um problema espectral através de cada uma das formulações abordadas, nomeadamente elementos finitos convencionais, elementos finitos híbridos e elementos finitos híbridos-Trefftz. É demonstrada a montagem dos sistemas resolutivos globais, a sua resolução e a construção dos campos das soluções, permitindo assim uma comparação direta entre os três tipos de elementos.



# Capítulo 2

## Descrição do problema

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada uma descrição geral do problema em estudo. São definidas as equações que regem o comportamento do sistema e permitem a sua caracterização e modelação. No domínio do problema, são apresentadas as equações de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade, e é ainda obtida a equação de Navier, que resulta da eliminação dos campos de tensão e deformação dessas três equações. As equações no domínio, no caso geral, são equações diferenciais em ordem ao espaço e ao tempo. A variável tempo não existe nos problemas estáticos e pode ser eliminada em problemas harmónicos se a resolução dos mesmos se fizer no domínio das frequências.

Para uma descrição completa do problema em estudo, neste capítulo são também definidas as condições de fronteira e, para problemas transitórios, as condições iniciais.

### 2.2 Descrição do problema

Considere o caso geral da barra de comprimento  $L$ , área da secção transversal  $A$  e sujeita a uma carga de vão  $f(x, t)$  representada na Figura 2.1. Considere ainda que a barra é feita de um material com comportamento elástico-linear, homogéneo e isotrópico, de densidade  $\rho$  e módulo de Young  $E$ . Forças e deslocamentos podem ser aplicados, de maneira arbitrária, nas extremidades da barra. No caso concreto representado na Figura 2.1, a barra tem aplicado um deslocamento  $u_r(t)$  em  $x = 0$  e uma força  $F(t)$  em  $x = L$ .

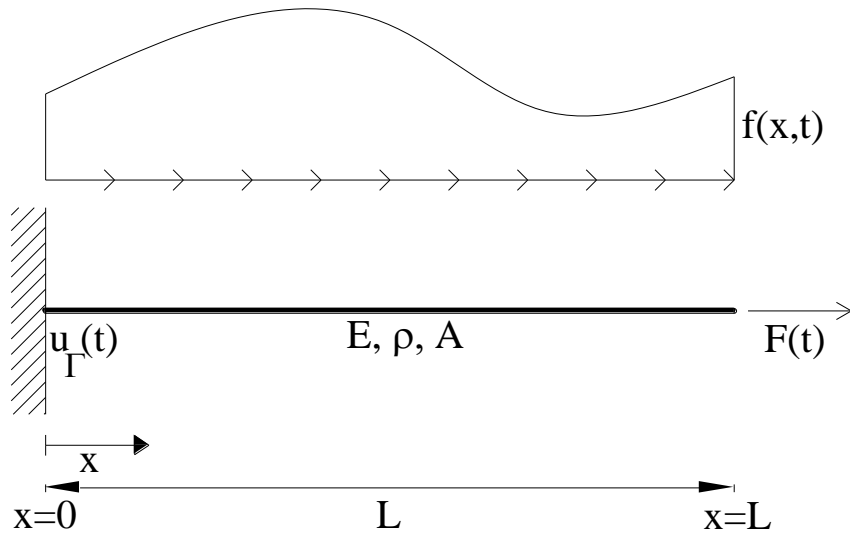


Figura 2.1: Barra solicitada axialmente

O problema em estudo é governado por equações no domínio (no interior da barra) e nas fronteiras (extremidades da barra). Todas as equações serão descritas de um modo geral, em ordem ao espaço e ao tempo.

### 2.2.1 Equações no domínio

Para o problema elástico-linear, as equações diferenciais no domínio são as seguintes:

- Equação de equilíbrio: descreve o equilíbrio instantâneo de um elemento diferencial de barra sujeito às tensões aplicadas pelos troços vizinhos, força de vão e força de inércia, provocada pela sua aceleração. A equação de equilíbrio tem a seguinte expressão,

$$\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} + b(x,t) = \rho \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

sendo  $\sigma(x,t)$  o campo de tensões,  $u(x,t)$  o campo de deslocamentos,  $b(x,t)$  o quociente entre a carga de vão  $f(x,t)$  e a área da secção transversal da barra,  $b(x,t) = \frac{f(x,t)}{A}$ . Neste trabalho, a área será considerada constante no interior de cada elemento finito. No entanto, uma variação de área poderá ser aproximada definindo áreas diferentes para elementos diferentes. Note-se que o amortecimento interno da barra foi considerado desprezável.

- Equação de compatibilidade: relaciona a deformação elástica longitudinal,  $\varepsilon(x, t)$ , com o deslocamento,  $u(x, t)$ ,

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.2)$$

- Equação de elasticidade (ou lei de Hooke): Caracteriza a relação linear entre a tensão,  $\sigma(x, t)$ , e a deformação elástica longitudinal,  $\varepsilon(x, t)$ ,

$$\sigma(x, t) = E \cdot \varepsilon(x, t) \quad (2.3)$$

As tensões e as deformações podem ser eliminadas das equações (2.1) a (2.3). Substituindo sucessivamente as deformações dadas pela equação (2.2) na equação (2.3), e a expressão resultante das tensões na equação (2.1), obtém-se uma equação diferencial, em deslocamentos apenas, chamada equação de Navier:

$$E \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b(x, t) = \rho \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

A equação de Navier é uma equação diferencial hiperbólica (logo de segunda ordem) e não homogênea no caso de existirem cargas de vão. Dividindo os dois lados da equação (2.4) pelo módulo de Young permite pôr em evidência a velocidade de propagação das ondas longitudinais  $V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  [28]. A equação de Navier escreve-se então:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{E} \cdot b(x, t) = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Equações na fronteira

As equações no domínio devem ser complementadas pelas condições de fronteira a que a barra é sujeita. Serão considerados neste trabalho dois tipos de condições de fronteira:

- Fronteira de Dirichlet,  $\Gamma_u$ : tipo de fronteira onde é imposto o deslocamento  $u_\Gamma(t)$ ,

$$u(x, t) = u_\Gamma(t) \quad (2.6)$$

- Fronteira de Neumann,  $\Gamma_\sigma$ : tipo de fronteira em que as forças ou tensões são conhecidas,

$$n_\Gamma \cdot \sigma(x, t) = \frac{F(t)}{A} \quad (2.7)$$

em que  $F(t)$  é a força aplicada na fronteira e  $n_\Gamma$  é a normal unitária ao plano da fronteira. Dependendo da localização na barra, a normal unitária tem o valor  $n_\Gamma = \pm 1$ .

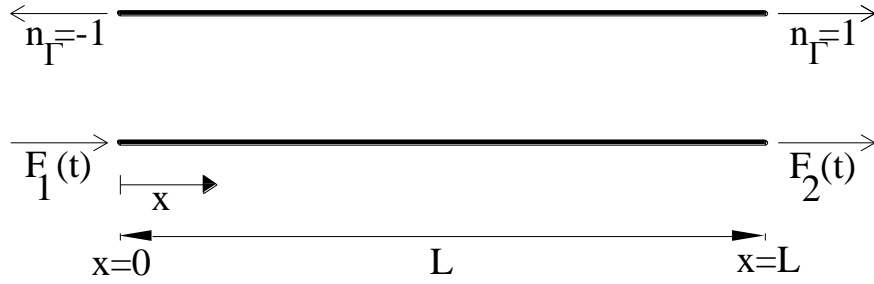


Figura 2.2: Representação da normal unitária e das forças aplicadas nas extremidades da barra

Na Figura 2.2 podem-se visualizar os sentidos positivos para as forças  $F(t)$  aplicadas nas extremidades da estrutura. No entanto, por convenção e sem prejuízo da generalidade da formulação, neste trabalho, nas fronteiras de Neumann serão impostas tensões e não forças. Assim, sendo  $\sigma_\Gamma(t)$  a tensão imposta na fronteira  $\Gamma_\sigma$  e visto que a normal unitária tem o valor  $n_\Gamma = -1$  em  $x = 0$  e  $n_\Gamma = 1$  em  $x = L$ , resulta que as forças positivas representadas na Figura 2.2 terão de ser definidas através das seguintes tensões impostas:

$$\sigma_{\Gamma 1}(t) = -\frac{F_1(t)}{A}, \quad \sigma_{\Gamma 2}(t) = +\frac{F_2(t)}{A} \quad (2.8)$$

### 2.2.3 Condições iniciais do problema

Além das equações no domínio e das condições de fronteira da estrutura, é necessário especificar as condições iniciais para uma definição completa do problema em estudo. Então, as condições iniciais do problema, deslocamento inicial, velocidade inicial e (opcionalmente) aceleração inicial são, respetivamente, dadas por:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.9)$$

$$\dot{u}(x, 0) = v_0(x) \quad (2.10)$$

$$\ddot{u}(x, 0) = a_0(x) \quad (2.11)$$

sendo  $\dot{u}(x, 0)$  e  $\ddot{u}(x, 0)$  as primeira e segunda derivadas do deslocamento em ordem ao tempo, quando  $t = 0$ .

Em problemas estáticos, todos os termos que envolvem derivadas no tempo desaparecem, incluindo as condições iniciais acima apresentadas. No caso geral, e principalmente para problemas transitórios, o problema descrito aqui não tem solução



analítica, pelo que terá de ser resolvido de maneira aproximada. Uma metodologia de resolução será proposta no capítulo seguinte.



# Capítulo 3

## Formulações de elementos finitos

### 3.1 Introdução

As equações do problema apresentado no capítulo anterior podem ser resolvidas recorrendo a métodos de aproximação numérica. Destes, o método dos elementos finitos é um dos métodos mais utilizados devido à qualidade das suas soluções e à sua versatilidade, que o tornam adequado para praticamente qualquer tipo de equação diferencial. Assim, pretende-se neste capítulo apresentar um conjunto de abordagens disponíveis para a resolução do problema em análise, baseado no método dos elementos finitos.

Primeiramente será efetuada a discretização no tempo, reduzindo a equação de Navier (2.4) e todas as relações fundamentais descritas no capítulo anterior para uma série de equações apenas em ordem ao espaço. Para efetuar a integração no tempo, será utilizado o método de Newmark.

Depois de feita a integração no tempo, a resolução numérica da fase seguinte corresponde à discretização no espaço. Para esse efeito, é obtida a forma integral do problema em estudo, através da imposição fraca das equações governativas resultantes da discretização no tempo. A forma integral do problema é posteriormente utilizada para obter as formulações de elementos finitos. Três tipos de elementos finitos são derivados: elementos finitos conformes de deslocamento (convencionais), elementos finitos híbridos e elementos finitos híbridos-Trefftz. Em todos os casos, a aproximação primária é a do campo de deslocamentos, sendo que as formulações diferem principalmente pela natureza das funções de aproximação incluídas na respetiva base. As funções de aproximação dos elementos convencionais são determinadas de maneira a garantir o cumprimento local das condições de compatibilidade no domínio dos elementos e nas fronteiras Dirichlet e interiores. A escolha das funções a incluir na base de aproximação dos elementos finitos híbridos é consideravelmente mais flexível, mas as condições de compatibilidade nas

fronteiras devem agora ser impostas explicitamente. Finalmente, neste trabalho, os elementos híbridos-Trefftz são obtidos acrescentando às bases dos elementos híbridos funções adicionais, talhadas para o problema particular que se está a resolver.

### 3.2 Integração no tempo

Os procedimentos numéricos de integração no tempo tipicamente utilizados para a integração no tempo da equação diferencial de Navier (2.4) incluem métodos baseados em transformações, como por exemplo transformações de Fourier ou de Laplace, e métodos de integração direta.

A transformação de Fourier tem a vantagem de resolver a equação diferencial num só passo de tempo mas, em contrapartida, exige a periodicidade do problema, não apresenta bons resultados face a solicitações transitórias e não considera as condições iniciais do problema.

Os métodos de integração direta são geralmente baseados em séries de potências. A duração total da análise é dividida em passos de tempo e, em cada passo, as quantidades cinemáticas num determinado instante (tipicamente no final do passo) são expressas em função das mesmas quantidades no início do passo. Por exemplo, um procedimento típico de integração direta fornece, em função das condições iniciais definidas pelas equações (2.9), (2.10) e (2.11), estimativas dos campos de deslocamentos, velocidades e acelerações, respetivamente  $u_{\Delta t}$ ,  $v_{\Delta t}$  e  $a_{\Delta t}$ , no final do passo de tempo. Os métodos de integração direta podem ser classificados em métodos explícitos e métodos implícitos.

Nos métodos de integração direta explícitos, os deslocamentos e as velocidades  $u_{\Delta t}$  e  $v_{\Delta t}$  são calculados apenas utilizando as condições iniciais do problema,  $u_0$ ,  $v_0$  e  $a_0$ . Embora de fácil utilização, estes métodos nem sempre são estáveis, requerendo passos de tempo  $\Delta t$  bastante reduzidos para as soluções não divergirem. O método de Euler é um exemplo de um método explícito.

Por sua vez, os métodos de integração direta implícitos, relacionam  $u_{\Delta t}$  e  $v_{\Delta t}$  com  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $a_0$ , que são conhecidos, e  $a_{\Delta t}$ , que é desconhecido. Os métodos implícitos são mais difíceis de implementar, mas oferecem mais estabilidade ao processo de integração, podendo ser incondicionalmente estáveis e oferecendo, por vezes, parâmetros para

controlar as propriedades de amortecimento numérico. O método de Newmark e o método de Houbolt são exemplos de métodos implícitos.

Como já referido, neste trabalho é utilizado o método de Newmark para a integração no tempo.

### 3.2.1 Método de Newmark

O método de Newmark, proposto por Nathan Newmark em 1959 [29], é um método implícito de integração direta de equações diferenciais que divide o tempo total da análise em passos de tempo de duração  $\Delta t$ , e utiliza séries de potências para obter estimativas dos campos de deslocamentos e velocidades no final de cada passo de tempo, respetivamente,

$$u_{\Delta t} = u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \Delta t^2 \cdot a_0 + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot a_{\Delta t} \quad (3.1)$$

$$v_{\Delta t} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=\Delta t} = v_0 + (1 - \gamma) \cdot \Delta t \cdot a_0 + \gamma \cdot \Delta t \cdot a_{\Delta t} \quad (3.2)$$

onde  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros que controlam as propriedades numéricas da aproximação. Estes parâmetros podem apresentar uma vasta gama de valores, como será discutido na Secção 3.2.2, mas os valores mais comuns são de  $\frac{1}{2}$  para  $\gamma$  e  $\frac{1}{4}$  ou  $\frac{1}{6}$  para  $\beta$ .

Quando  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{4}$  a equação (3.1) fica,

$$\begin{aligned} u_{\Delta t} &= u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \frac{1}{4} \cdot \Delta t^2 \cdot a_0 + \frac{1}{4} \cdot \Delta t^2 \cdot a_{\Delta t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u_{\Delta t} = u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot \left(\frac{a_0 + a_{\Delta t}}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Denotando a aceleração média dentro do passo de tempo como

$$a_{média} = \left(\frac{a_0 + a_{\Delta t}}{2}\right) \quad (3.4)$$

obtem-se,

$$u_{\Delta t} = u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot a_{média} \quad (3.5)$$

$$v_{\Delta t} = v_0 + \Delta t \cdot a_{média} \quad (3.6)$$

O significado das expressões (3.5) e (3.6) pode ser evidenciado analisando as séries de potências de Taylor,

$$u_{\Delta t} = u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \frac{\Delta t^2}{2!} \cdot a_0 + \frac{\Delta t^3}{3!} \cdot \dot{a}_0 + \dots \quad (3.7)$$

$$v_{\Delta t} = v_0 + \Delta t \cdot a_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot \dot{a}_0 + \dots \quad (3.8)$$

Observa-se agora que as equações (3.5) e (3.6) equivalem às séries de Taylor truncadas no termo de segunda ordem, onde a aceleração inicial  $a_0$  é substituída pela aceleração média  $a_{média}$  no passo de tempo.

Por sua vez, substituindo na equação (3.1)  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{6}$ , tem-se que,

$$\begin{aligned} u_{\Delta t} &= u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \frac{1}{3} \cdot \Delta t^2 \cdot a_0 + \frac{1}{6} \cdot \Delta t^2 \cdot a_{\Delta t} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_{\Delta t} &= u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot a_0 - \frac{1}{6} \cdot \Delta t^2 \cdot a_0 + \frac{1}{6} \cdot \Delta t^2 \cdot a_{\Delta t} \\ \Leftrightarrow u_{\Delta t} &= u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot a_0 + \frac{1}{6} \cdot \Delta t^3 \cdot \left( \frac{a_{\Delta t} - a_0}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Denotando o valor médio da derivada da aceleração no passo de tempo (Figura 3.1) por  $\dot{a}_0 = \frac{a_{\Delta t} - a_0}{\Delta t}$ , obtém-se,

$$u_{\Delta t} = u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot a_0 + \frac{1}{6} \cdot \Delta t^3 \cdot \dot{a}_0 \quad (3.10)$$

$$v_{\Delta t} = v_0 + \Delta t \cdot a_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta t^2 \cdot \dot{a}_0 \quad (3.11)$$

Mais uma vez observa-se que as equações (3.10) e (3.11) correspondem as séries de Taylor mas desta vez consideradas até ao termo de terceira ordem e admitindo uma variação linear da aceleração dentro do passo de tempo.

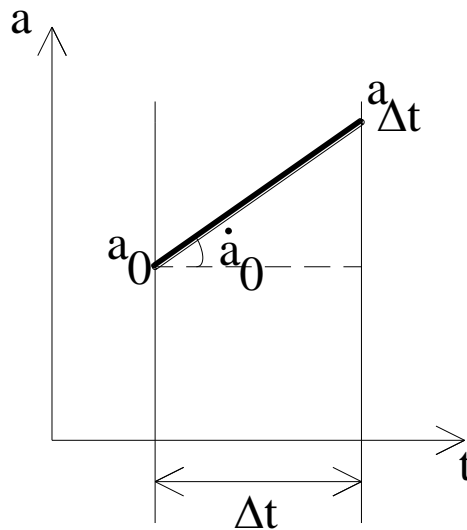


Figura 3.1: Aceleração linear dentro do passo de tempo

Os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  desempenham um papel importante no método de Newmark. Como já se viu, eles definem a variação da aceleração dentro do passo de tempo  $\Delta t$ . Por

outro lado, o parâmetro  $\gamma$  é responsável pelo controlo do amortecimento numérico e o parâmetro  $\beta$  pela estabilidade do método de Newmark.

### 3.2.2 Estabilidade do método de Newmark

Um método de integração direta no tempo é considerado estável se os erros numéricos produzidos num determinado passo de tempo não causam um aumento do erro numérico no passo seguinte. O estudo da estabilidade numérica dos algoritmos de integração no tempo é portanto fundamental para evitar a acumulação de erros ao longo da análise. Do ponto de vista da sua estabilidade, os algoritmos podem ser classificados como instáveis, condicionalmente estáveis e incondicionalmente estáveis. Um algoritmo é incondicionalmente estável se a sua estabilidade se verifica independente da dimensão do passo de tempo. Pelo contrário, a estabilidade de um algoritmo condicionalmente estável apenas se verifica se o passo de tempo for inferior a um determinado valor limite. Os algoritmos instáveis, que não garantem o controlo de erros numéricos independentemente da dimensão do passo de tempo, devem ser evitados na prática. A estabilidade do método de Newmark foi estudada por muitos autores [30], [31]. Foi determinado que, dependendo da escolha dos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$ , o método de Newmark pode ser:

- instável se

$$\gamma < \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

- condicionalmente estável se

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \text{ e } \beta < \frac{1}{4} \cdot \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (3.13)$$

Nesse caso, a estabilidade é garantida se o passo de tempo for inferior a

$$\Delta t \leq \frac{1}{\omega_{m\acute{a}x} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \quad (3.14)$$

onde  $\omega_{m\acute{a}x}$  é, na teoria, a frequência máxima que existe na transformada de Fourier contínua da força  $F(t)$  aplicada a estrutura. No entanto, na prática há muitas funções com espectro ilimitado, ou seja, a frequência máxima nunca se anula,  $\omega_{m\acute{a}x} = \infty$ . Nesses casos, a análise da transformada de Fourier permite identificar uma frequência

máxima artificial a considerar na análise, reconhecendo que todas as frequências acima desse valor serão mal representadas pelo algoritmo de Newmark.

- incondicionalmente estável se

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad e \quad \beta \geq \frac{1}{4} \cdot \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (3.15)$$

A escolha de  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{4}$  leva a um operador de integração no tempo incondicionalmente estável de máxima precisão [32].

Na Figura 3.2 é representado um gráfico que ilustra a estabilidade do método de Newmark em função dos parâmetros  $\gamma$  (na abcissa) e  $\beta$  (na ordenada).

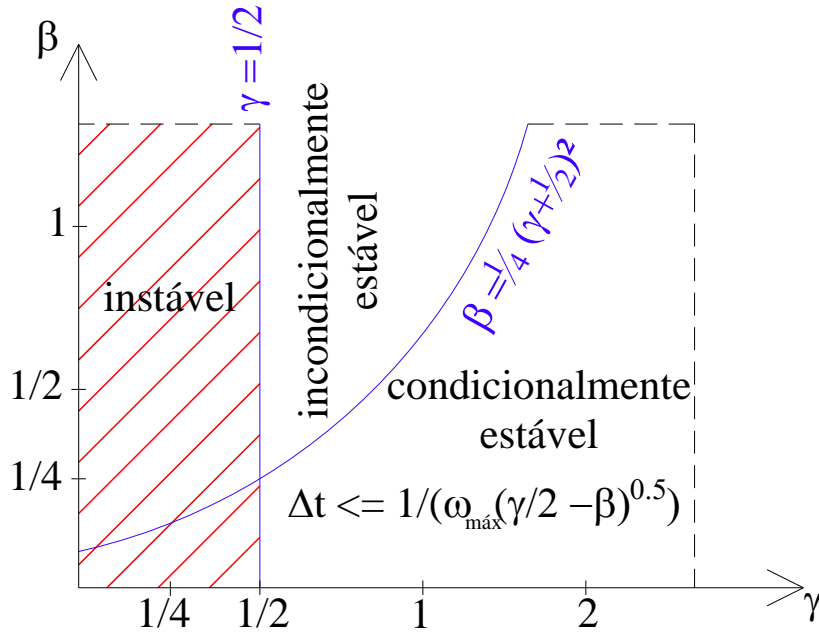


Figura 3.2: Estabilidade do método de Newmark

### 3.2.3 Equações discretizadas

A discretização das equações (2.1) a (2.3), (2.6) e (2.7) é feita impondo-as no final do passo de tempo e substituindo a aceleração nesse instante pela sua expressão aproximada. Assim, utilizando a equação (3.1) e isolando o termo  $a_{\Delta t}$ , obtém-se que a aceleração no final do passo de tempo é dada por:

$$a_{\Delta t} = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \left[ u_{\Delta t} - \left( u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \cdot \Delta t^2 \cdot a_0 \right) \right] \quad (3.16)$$

Denotando,



$$\overline{u_0} = u_0 + \Delta t \cdot v_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \cdot \Delta t^2 \cdot a_0 \quad (3.17)$$

obtem-se a expressão para a aceleração no final do passo de tempo:

$$a_{\Delta t} = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot (u_{\Delta t} - \overline{u_0}) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=\Delta t} \quad (3.18)$$

As formas discretizadas das equações de equilíbrio, compatibilidade e elasticidade são então as seguintes:

- Equação de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\Delta t}(x)}{\partial x} + b_{\Delta t}(x) &= \rho \cdot \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot (u_{\Delta t}(x) - \overline{u_0}(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma_{\Delta t}(x)}{\partial x} + b_{\Delta t}(x) + \omega^2 \cdot \rho \cdot u_{\Delta t}(x) &= \omega^2 \cdot \rho \cdot \overline{u_0}(x) \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $\omega$  é uma frequência generalizada de vibração do sistema,  $\omega^2 = -\frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2}$ . Visto que o termo  $\omega^2 \cdot \rho \cdot \overline{u_0}$  só depende das condições iniciais, denotamos  $f_0(x) = \omega^2 \cdot \rho \cdot \overline{u_0}(x)$ . Então, a equação de equilíbrio (3.19) escreve-se:

$$\frac{\partial \sigma_{\Delta t}(x)}{\partial x} + b_{\Delta t}(x) + \omega^2 \cdot \rho \cdot u_{\Delta t}(x) = f_0(x) \quad (3.20)$$

- Equação de compatibilidade:

$$\varepsilon_{\Delta t}(x) = \frac{\partial u_{\Delta t}(x)}{\partial x} \quad (3.21)$$

- Equação de elasticidade:

$$\sigma_{\Delta t}(x) = E \cdot \varepsilon_{\Delta t}(x) \quad (3.22)$$

Das equações governativas (3.20), (3.21) e (3.22) obtém-se a forma discretizada da equação de Navier,

$$E \cdot \frac{\partial^2 u_{\Delta t}(x)}{\partial x^2} + b_{\Delta t}(x) + \omega^2 \cdot \rho \cdot u_{\Delta t}(x) = f_0(x) \quad (3.23)$$

Observa-se que, para cada passo de tempo, a equação hiperbólica (2.4) foi reduzida a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem do tipo (3.23). No entanto, a equação (3.23) não é homogênea mesmo que não haja cargas de vão, devido ao termo  $f_0$ , dependendo portanto das condições iniciais.

Para completar a discretização no tempo, resta agora reescrever as condições de fronteira de Dirichlet e Neumann (2.6) e (2.7) no final do passo do tempo:

$$u_{\Delta t}(x) = u_{\Gamma}(\Delta t), \quad \text{em } \Gamma_u \quad (3.24)$$

$$n_{\Gamma} \cdot \sigma_{\Delta t}(x) = \frac{F(\Delta t)}{A}, \quad \text{em } \Gamma_{\sigma} \quad (3.25)$$

### 3.3 Integração no espaço

Esta secção tem como objetivo desenvolver formulações de elementos finitos para a resolução das equações (3.20) a (3.22), sujeitas às condições de fronteira (3.24) e (3.25). Tendo em conta que a metodologia de resolução do problema será a mesma em todos os passos de tempo, o índice  $\Delta t$  presente nas equações (3.20) a (3.25) é redundante e será descartado no resto deste capítulo.

#### 3.3.1 Forma fraca das equações governativas

Existem várias metodologias para derivar as equações do método dos elementos finitos a partir das equações governativas. Uma das abordagens mais gerais é baseada na forma fraca das mesmas. Para exemplificar o processo de derivação da forma fraca do problema, considere a barra apresentada na Figura 3.3 de comprimento total  $L$  e com área da secção transversal  $A$ . A barra é feita de um material com as características mecânicas  $E$  e  $\rho$ , e é sujeita a um deslocamento na fronteira do tipo Dirichlet ( $\Gamma_u$ ) em  $x = 0$ . A barra encontra-se ainda sujeita a uma carga axial de vão  $f(x)$  e tem imposta uma força  $F$  na fronteira do tipo Neumann ( $\Gamma_\sigma$ ) em  $x = L$ .

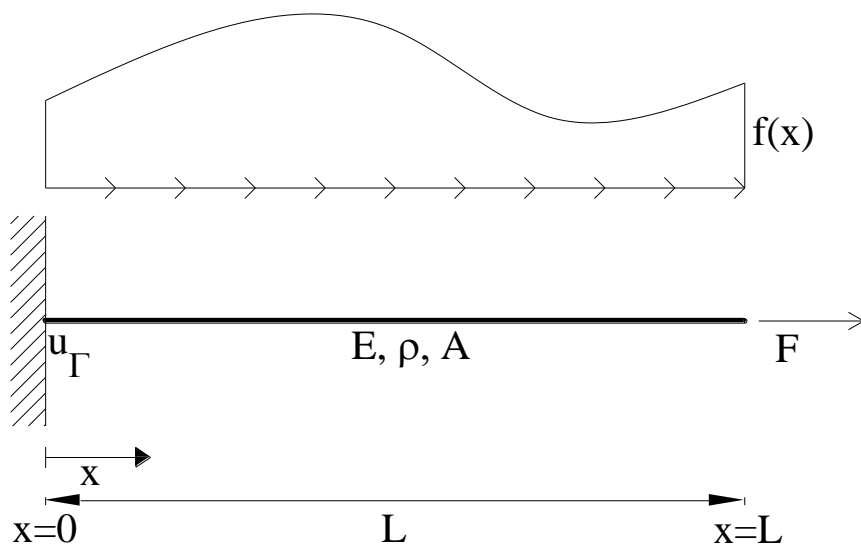


Figura 3.3: Barra solicitada axialmente

A forma fraca da equação diferencial (3.23) é obtida impondo que o produto interno da equação, por uma função arbitrária  $w(x)$  chamada de função de peso, seja nulo:

$$\int_0^L w \cdot \left( E \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + b + \omega^2 \cdot \rho \cdot u - f_0 \right) dx = 0 \quad (3.26)$$

É imediato observar que a expressão (3.26) é respeitada para qualquer função de peso  $w(x)$  se e só se a equação diferencial é respeitada em todos os pontos do domínio. Quando se utiliza a forma fraca de uma equação diferencial distribui-se a diferenciação entre a variável dependente e as funções de peso  $w(x)$ , aliviando assim as restrições de continuidade impostas à função  $u(x)$ . Isso torna-se óbvio integrando por partes o primeiro termo da expressão (3.26), obtendo-se assim:

$$E \cdot \int_0^L w \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} dx = E \cdot \left[ \left( w \cdot \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} - \left( w \cdot \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} - \int_0^L \frac{dw}{dx} \cdot \frac{du}{dx} dx \right] \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) na equação (3.26), esta fica:

$$\begin{aligned} E \cdot \left[ \left( w \cdot \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=L} - \left( w \cdot \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} - \int_0^L \frac{dw}{dx} \cdot \frac{du}{dx} dx \right] + \int_0^L w \cdot b dx + \\ + \int_0^L w \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot u dx = \int_0^L w \cdot f_0 dx \end{aligned} \quad (3.28)$$

Recorrendo às equações de compatibilidade (3.21) e de elasticidade (3.22), e tendo em conta a condição de fronteira de Neumann (3.25), percebe-se que:

$$E \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = \sigma(L) = \sigma_r; \quad E \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = \sigma(0) \quad (3.29)$$

Substituindo as expressões (3.29) na equação (3.28) obtém-se:

$$\begin{aligned} w(L) \cdot \sigma_r - w(0) \cdot \sigma(0) - E \cdot \int_0^L \frac{dw}{dx} \cdot \frac{du}{dx} dx + \int_0^L w \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot u dx = \\ = \int_0^L w \cdot f_0 dx - \int_0^L w \cdot b dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

A equação (3.30) representa a forma fraca da equação governativa de Navier. Esta equação impõe, não só todas as equações no domínio, como também as condições de fronteira de Neumann (3.25).

### 3.3.2 Princípios fundamentais dos elementos finitos

Particularizando os princípios fundamentais do método dos elementos finitos para a barra representada na Figura 3.3, a discretização geométrica da mesma consiste em dividir a barra de comprimento total  $L$  em  $N$  elementos de comprimento  $L_e$ . Note-se que a

dimensão dos elementos finitos não tem de ser, em geral, a mesma, apesar de se considerar assim neste contexto para facilitar a apresentação. As fronteiras dos elementos são chamadas de nós (Figura 3.4) e o conjunto de elementos é chamado de malha de elementos finitos. O objetivo de dividir a barra em elementos finitos é o de tornar mais exequível a aproximação da solução global (possivelmente complexa), utilizando funções de aproximação simples.

Ao dividir o domínio da barra em  $N$  elementos finitos, cria-se a necessidade adicional de garantir que os elementos respeitem as condições de continuidade tanto em deslocamentos como em tensões. Assim, surgem duas equações adicionais comuns a todos os tipos de elementos finitos:

- Condição de compatibilidade (no nó comum aos elementos  $i$  e  $i + 1$ ):

$$u^i = u^{i+1} \quad (3.31)$$

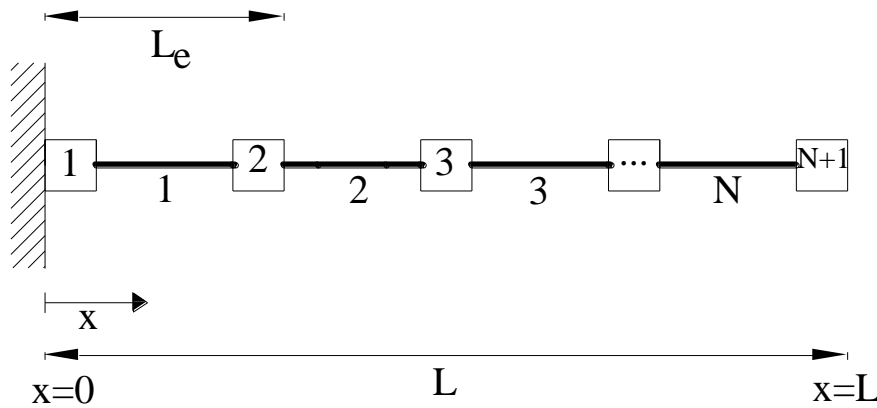


Figura 3.4: Discretização de uma barra, utilizando elementos finitos

- Condição de equilíbrio (no nó comum aos elementos  $i$  e  $i + 1$ ):

$$F^i + F^{i+1} = 0 \quad (3.32)$$

Dentro de cada elemento, há a necessidade de aproximar um dos campos desconhecidos. Existem métodos que envolvem a aproximação de qualquer um dos campos de deslocamento, deformação e tensão mas, neste trabalho, optou-se por aproximar o campo dos deslocamentos:

$$u(x) = \Psi(x) \cdot \mathbf{q} \quad (3.33)$$

onde  $\Psi(x)$  são as funções de aproximação e  $\mathbf{q}$  os deslocamentos generalizados.

Note-se que a aproximação (3.33) é a mais utilizada (e, tipicamente, a única disponível) nos programas comerciais, pelo que a sua adoção neste trabalho irá permitir

a comparação direta dos resultados com os obtidos com esses programas. Uma vez determinada a aproximação dos deslocamentos  $u(x)$ , derivam-se as aproximações para o campo das deformações  $\varepsilon(x)$ , a partir da equação de compatibilidade (3.21), e para o campo das tensões  $\sigma(x)$ , recorrendo à equação de elasticidade (3.22), obtendo-se assim, respetivamente,

$$\varepsilon(x) = \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \mathbf{q} \quad (3.34)$$

$$\sigma(x) = E \cdot \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \mathbf{q} \quad (3.35)$$

Para determinar os pesos das funções de aproximação, recorre-se à forma fraca (3.30), onde será ainda preciso definir as funções de peso  $w(x)$ . Precisando-se de tantas equações quantos termos existem na base (3.33), o mais apropriado é obtê-las impondo a forma fraca utilizando as funções da base como funções peso [33]. Esta opção, que estipula portanto que,

$$w(x) \equiv \Psi(x) \quad (3.36)$$

designa-se por método de Galerkin. Para além de garantir ter sempre exatamente o número correto de equações, o método de Galerkin tem a vantagem de que o sistema resolutivo resulta simétrico.

Todos os princípios do método dos elementos finitos descritos nesta secção são comuns aos elementos finitos convencionais e não convencionais que serão formulados na secção seguinte.

### 3.3.3 Elementos finitos conformes de deslocamento

A ideia fundamental dos elementos finitos conformes de deslocamento é usar funções de aproximação que garantem o cumprimento das equações de compatibilidade no domínio, tal como da condição de fronteira de Dirichlet (3.24) e da equação de continuidade inter-elementar (3.31). Consequentemente, todos os termos das fronteiras inter-elementares e os termos definidos na fronteira de Dirichlet onde o deslocamento imposto é nulo desaparecem da forma fraca (3.30), ou seja, a condição de Dirichlet é implicitamente respeitada. Por estes motivos, as soluções dos elementos finitos convencionais são localmente compatíveis (ou conformes). No entanto, as soluções são geralmente estaticamente inadmissíveis pois não respeitam localmente o equilíbrio no

domínio (embora o equilíbrio global do elemento seja respeitado), e não respeitam a continuidade das tensões entre os elementos.

Para obter as funções de aproximação para o elemento convencional compatível considere a situação ilustrada na Figura 3.5, onde o elemento foi deformado pela aplicação dos deslocamentos nodais  $u_A$  e  $u_B$ . Nos elementos convencionais, o campo de deslocamento  $u(x)$  é determinado univocamente pelos deslocamentos dos nós do elemento  $u_A$  e  $u_B$ . Então,

$$u(x) = u_A \cdot f_A(x) + u_B \cdot f_B(x) \quad (3.37)$$

sendo  $f_A(x)$  e  $f_B(x)$  funções de aproximação a incluir na base  $\Psi(x)$  do elemento.

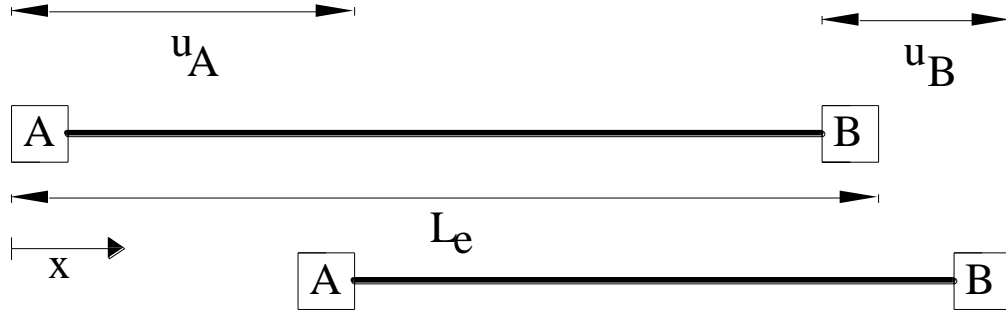


Figura 3.5: Deslocamento dos nós de um elemento finito

As funções de aproximação devem garantir que o campo dos deslocamentos  $u(x)$  consegue recuperar corretamente os deslocamentos nodais  $u_A$  e  $u_B$ . Para garantir isso, é necessário respeitar,

$$\begin{cases} f_A(0) = 1 \\ f_A(L_e) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_B(0) = 0 \\ f_B(L_e) = 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

Com efeito, se as condições (3.38) forem respeitadas, resulta que,

$$u(0) = u_A \cdot f_A(0) + u_B \cdot f_B(0) = u_A \quad (3.39)$$

$$u(L_e) = u_A \cdot f_A(L_e) + u_B \cdot f_B(L_e) = u_B \quad (3.40)$$

Para poder determinar univocamente as funções  $f_A(x)$  e  $f_B(x)$  através das condições (3.38), estas funções devem ser de primeiro grau. Logo, as suas expressões obtêm-se escrevendo:

$$\begin{cases} f_A(x) = a \cdot x + b \\ f_A(0) = 1 \leftrightarrow b = 1 \\ f_A(L_e) = 0 \leftrightarrow a \cdot L_e + 1 = 0 \leftrightarrow a = -\frac{1}{L_e} \end{cases} \rightarrow f_A(x) = -\frac{1}{L_e} \cdot x + 1 \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} f_B(x) = a \cdot x + b \\ f_B(0) = 0 \leftrightarrow b = 0 \\ f_B(L_e) = 1 \leftrightarrow a \cdot L_e + 0 = 1 \leftrightarrow a = \frac{1}{L_e} \end{cases} \rightarrow f_B(x) = \frac{1}{L_e} \cdot x \quad (3.42)$$

Assim, as funções de aproximação para os elementos finitos conformes de deslocamentos são dadas por:

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_e} & \frac{x}{L_e} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

e encontram-se representadas na Figura 3.6.

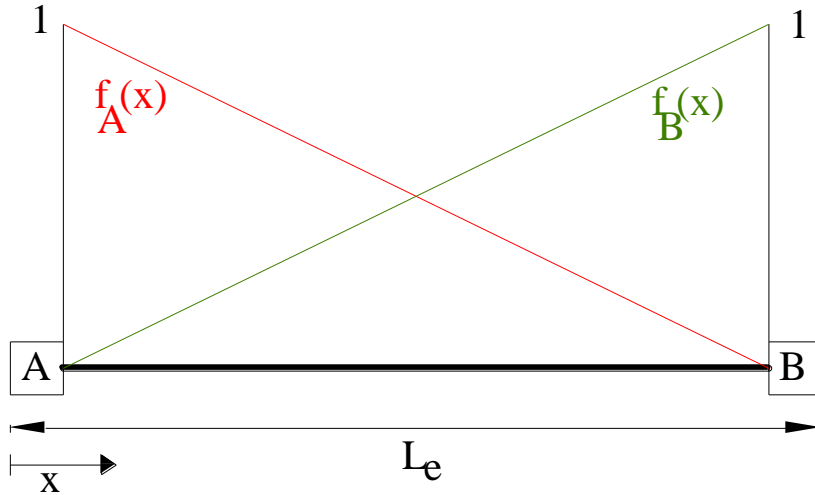


Figura 3.6: Funções da base linear de um elemento finito convencional

O campo de deslocamentos no elemento (3.37) escreve-se:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_A \cdot \left(1 - \frac{x}{L_e}\right) + u_B \cdot \left(\frac{x}{L_e}\right) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad u(x) &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_e} & \frac{x}{L_e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Denotando por  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix}$  o vetor dos deslocamentos nodais do elemento, a equação (3.44) escreve-se:

$$u(x) = \Psi(x) \cdot \mathbf{q} \quad (3.45)$$

Conforme mostrado na Secção 3.3.2, a equação governativa do elemento finito convencional representado na Figura 3.7 é obtida a partir da forma fraca (3.30), utilizando as funções contidas na base  $\Psi(x)$  como funções de peso:

$$w(x) \equiv u(x) = \Psi(x) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \cdot \Psi^T(x) \quad (3.46)$$

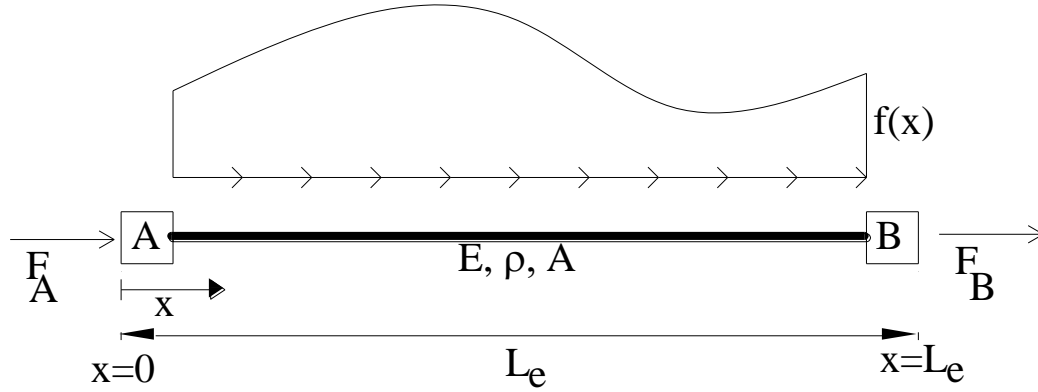


Figura 3.7: Elemento sujeito a carga axial de vão e a forças nodais

Substituindo a aproximação (3.46) na forma fraca (3.30), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T \cdot \Psi^T(L_e) \cdot \sigma_L - \mathbf{q}^T \cdot \Psi^T(0) \cdot \sigma(0) - \mathbf{q}^T \cdot \int_0^{L_e} \frac{d\Psi^T}{dx} \cdot E \cdot \frac{d\Psi}{dx} dx \cdot \mathbf{q} + \omega^2 \cdot \mathbf{q}^T \cdot \\ \cdot \int_0^{L_e} \Psi^T \cdot \rho \cdot \Psi dx \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \cdot \int_0^{L_e} \Psi^T \cdot f_0 dx - \mathbf{q}^T \cdot \int_0^{L_e} \Psi^T \cdot b dx \end{aligned} \quad (3.47)$$

Tendo em conta que a expressão (3.47) deve ser verificada para valores arbitrários de  $\mathbf{q}^T$ , resulta que

$$\Psi^T(L_e) \cdot \sigma_L - \Psi^T(0) \cdot \sigma(0) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} + \omega^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{q} = \int_0^{L_e} \Psi^T \cdot f_0 dx - \int_0^{L_e} \Psi^T \cdot b dx \quad (3.48)$$

onde  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  representam as matrizes de rigidez e massa do elemento,

$$\mathbf{K} = \int_0^{L_e} \frac{d\Psi^T}{dx} \cdot E \cdot \frac{d\Psi}{dx} dx ; \quad \mathbf{M} = \int_0^{L_e} \Psi^T \cdot \rho \cdot \Psi dx \quad (3.49)$$

Denotando por  $\mathbf{D}$  a matriz dinâmica,

$$\mathbf{D} = (\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M}) \quad (3.50)$$

e por  $\mathbf{F}_0 = \int_0^{L_e} \Psi^T \cdot f_0 dx$  e  $\mathbf{B} = \int_0^{L_e} \Psi^T \cdot b dx$  os integrais que envolvem  $f_0(x)$  e as cargas de vão, respetivamente, a equação (3.48) escreve-se:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{q} = \Psi^T(L_e) \cdot \sigma_L - \Psi^T(0) \cdot \sigma(0) - \mathbf{B} + \mathbf{F}_0 \quad (3.51)$$

A equação (3.51) é a equação governativa do método dos elementos finitos conformes de deslocamento ao nível do elemento.



Normalmente, os problemas envolvendo barras solicitadas axialmente são discretizados utilizando mais do que um elemento, como mostra a Figura 3.8. Por esse motivo, é necessário obter a equação governativa da estrutura através da imposição das condições inter-elementares (3.31) e (3.32).

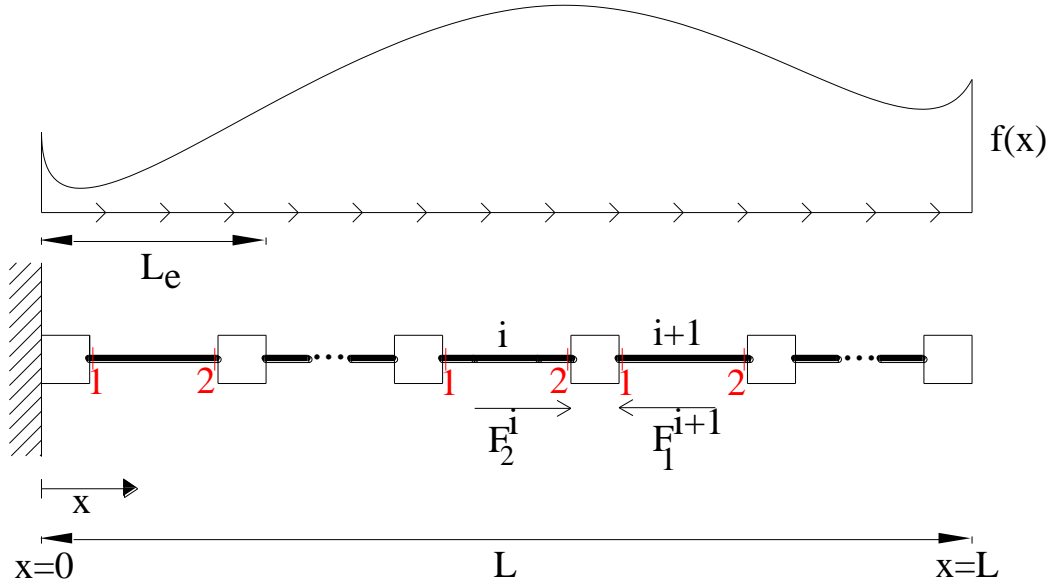


Figura 3.8: Barra solicitada axialmente com vários elementos

O sistema governativo global é obtido somando sucessivamente as equações governativas dos elementos adjacentes. A condição (3.32) faz com que os termos envolvendo as tensões nas extremidades dos elementos se anulem. A condição (3.31) faz com que  $\mathbf{q}_2^i = \mathbf{q}_1^{i+1}$ , pelo que os deslocamentos nodais podem ser postos em evidência, passando a ser multiplicados por somas de termos diagonais das matrizes dinâmicas de elementos adjacentes.

Para a construção automática da matriz dinâmica (3.50) do sistema governativo global, é importante salientar algumas das suas propriedades:

- A matriz  $\mathbf{D}$  têm tantas linhas/colunas quantos nós tem a estrutura;
- Os elementos diagonais representam, respetivamente, as somas dos termos  $D_{ii}$  e  $D_{jj}$  (com  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ ) dos elementos interligados no respetivo nó.
- Fora da diagonal, aparece um único termo  $D_{ij}$ , nomeadamente da barra que liga os nós correspondentes às linha e coluna consideradas. Se essa barra não

existir, o termo é nulo. Note que, por consequência desta propriedade, a matriz dinâmica resulta simétrica;

- Se a numeração dos elementos for sequencial, a matriz dinâmica é uma matriz banda, isto é, os seus elementos concentram-se a volta da diagonal principal;

No Anexo A encontra-se um exemplo da construção do sistema global de equações alusivo aos elementos finitos convencionais.

### 3.3.4 Elementos finitos híbridos

Como foi visto, os elementos finitos convencionais apresentam funções de aproximação condicionadas pela necessidade de garantirem o cumprimento de todas as condições de compatibilidade. Pelo contrário, nos elementos finitos híbridos esse condicionamento é eliminado e a escolha das bases de aproximação é praticamente livre. Então, a característica fundamental dos elementos finitos híbridos é que não condicionam as funções de aproximação no domínio da satisfação local das condições de Dirichlet (3.24) e da compatibilidade inter-elementar (3.31). Em contrapartida, nos elementos híbridos, as equações de compatibilidade nas fronteiras de Dirichlet e interiores precisam de ser impostas explicitamente. Sendo assim, haverá equações adicionais no sistema resolutivo para garantir a compatibilidade local da solução.

Para a dedução da forma integral das equações dos elementos híbridos, considera-se a situação representada na Figura 3.7 e procede-se tal qual como no elemento finito convencional. Assim, utilizando as notações definidas na Secção 3.3.3, tem-se que:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\Psi}^T(0) \cdot \sigma(0) - \boldsymbol{\Psi}^T(L_e) \cdot \sigma_\Gamma = \mathbf{B} - \mathbf{F}_0 \quad (3.52)$$

Para além da equação (3.52), tem que se impor separadamente a condição de Dirichlet:

$$u_\Gamma = \boldsymbol{\Psi}(0) \cdot \mathbf{q} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (3.53)$$

Assim, obtém-se o sistema de equações (3.54) para o elemento finito híbrido:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \boldsymbol{\Psi}^T \\ \boldsymbol{\Psi} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^T(L_e) \cdot \sigma_\Gamma + \mathbf{B} - \mathbf{F}_0 \\ u_\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

De notar que apesar de, em geral, as condições de compatibilidade nas fronteiras dos elementos híbridos não serem localmente respeitadas, o elemento de barra é uma exceção dessa regra.

A nível do sistema global, quando a barra tem mais do que um elemento e considerando um determinado nó  $j$  que liga os elementos  $i$  e  $i + 1$ , nos elementos finitos híbridos deve-se impor ainda a seguinte condição de continuidade inter-elementar:

$$u_j^i = \Psi^i(x_j) \cdot \mathbf{q}^i = u_j^{i+1} = \Psi^{i+1}(x_j) \cdot \mathbf{q}^{i+1} \quad (3.55)$$

No Anexo B encontra-se um exemplo da construção do sistema global de equações relativo aos elementos finitos híbridos.

Como funções de aproximação para os elementos finitos híbridos, neste trabalho foram utilizados monómios de grau  $n$  ( $x^n$ ) e polinómios de Chebyshev. Os monómios de grau  $n$  são funções que, apesar de serem uma aproximação simples e eficaz numa variedade de problemas, podem gerar sistemas resolutivos com números de condição bastante elevados, principalmente quando se usam funções de aproximação de grau elevado. Para ilustrar a qualidade da base monomial, os seus primeiros termos encontram-se representados na Figura 3.9. À medida que o grau da base é aumentado, as novas funções de aproximação tornam-se cada vez mais semelhantes, afetando assim o número de condição do sistema resolutivo.

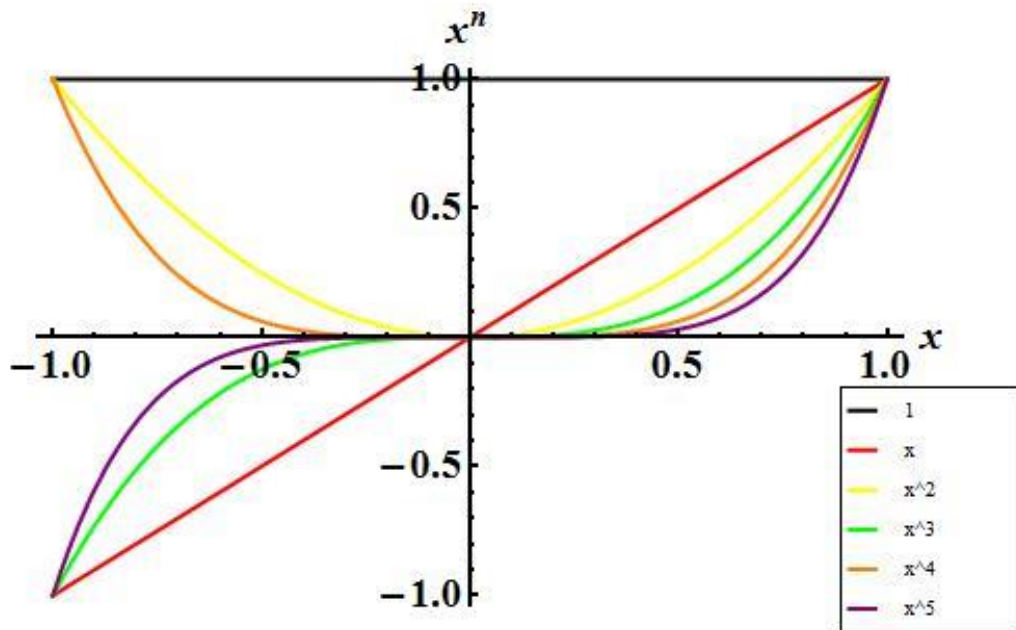


Figura 3.9: Monómios  $x^n$

Por isso, visto que o condicionamento do sistema é geralmente melhor do que o obtido com os monómios  $x^n$ , optou-se por implementar ainda bases de aproximação construídas com polinómios de Chebyshev.

Introduzidos por Pafnuty Chebyshev (1821-1894), os polinómios de Chebyshev (tipo I) de grau  $n \geq 0$  são definidos como:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases} \quad x \in [-1, 1] \quad (3.56)$$

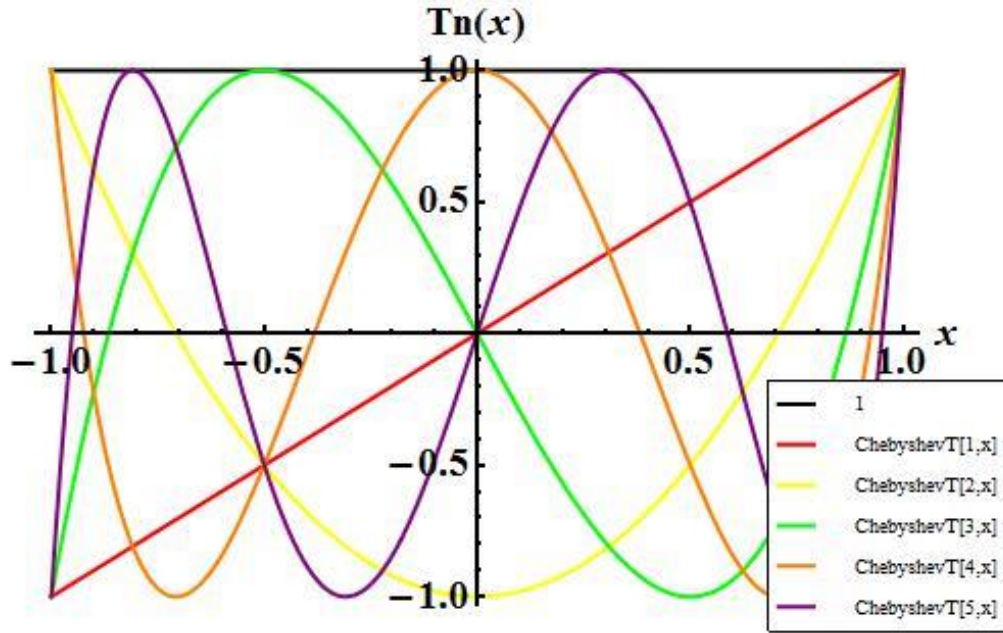


Figura 3.10: Polinómios de Chebyshev, de  $T_0(x)$  a  $T_5(x)$

Contudo, existe ainda uma definição trigonométrica para os polinómios de Chebyshev de tipo I, que foi utilizada para a programação dos mesmos na plataforma computacional desenvolvida:

$$T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)] \quad (3.57)$$

A derivada do polinómio de Chebyshev de grau  $n$  é dada por:

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{n \cdot \sin[n \cdot \arccos(x)]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.58)$$

Os primeiros cinco polinómios de Chebyshev encontram-se representados na Figura 3.10, no intervalo  $[-1, 1]$ . Comparando com os monómios de tipo  $(x^n)$ , os polinómios de Chebyshev revelam diferenças substanciais entre os termos consecutivos da base, o que leva a que o condicionamento dos sistemas resolutivos seja, por norma, melhor.

Já descritos os elementos finitos convencionais e híbridos, elaborou-se a Tabela 3.1 de maneira a sistematizar as diferenças mais relevantes entre esses tipos de elementos.

	<b>Convencional</b>	<b>Híbridos</b>
<b>Aproximação</b>	<p>→Fixa;</p> <p>→Condicionada pelo número de nós.</p>	<p>→Flexível;</p> <p>→As aproximações são independentes dos nós dos elementos.</p>
<b>Sistema</b>	<p>→Simétrico;</p> <p>→Entradas diagonais somam as matrizes dinâmicas de vários elementos;</p> <p>→Dimensão reduzida.</p>	<p>→Simétrico;</p> <p>→Entradas diagonais não somam matrizes dinâmicas;</p> <p>→Maior dimensão.</p>
<b>Soluções do sistema</b>	→Representam deslocamentos nodais.	→Não têm significado físico.
<b>Refinamento</b>	<p>→Refinamento <math>h</math> (aumentar o número de elementos finitos);</p> <p>→Em geral, não se usam elementos com refinamentos <math>p</math> (grau das funções de aproximação) diferentes na mesma malha.</p>	<p>→Refinamentos <math>h</math> e <math>p</math>;</p> <p>→É possível usar refinamentos <math>p</math> localizados;</p>
<b>Solução</b>	<p>→Localmente compatível;</p> <p>→Não equilibrada (tensões descontínuas entre elementos).</p>	<p>→Localmente compatível (no caso da barra);</p> <p>→As condições de equilíbrio são impostas em forma fraca.</p>

Tabela 3.1: Comparação entre os elementos finitos convencionais e híbridos

### 3.3.5 Elementos finitos híbridos-Trefftz

Em 1926, Erich Trefftz (1888-1937) apresentou uma alternativa para a resolução numérica de equações diferenciais com derivadas parciais que, ao longo dos anos, tem vindo a ser generalizada por vários autores (por exemplo [34], [35]). Ao contrário da abordagem de Rayleigh-Ritz, na qual se baseiam os elementos conformes de deslocamentos, a proposta de Trefftz foi de construir as bases de aproximação do elemento finito utilizando funções que satisfazem localmente as equações governativas definidas no domínio do elemento (condição de Trefftz). Os pesos com os quais cada função contribui para a solução são depois calculados de maneira a garantir que a solução satisfaz da melhor forma possível as condições de fronteira impostas ao elemento. Ao invés dos elementos conformes e híbridos, as bases de aproximação dos elementos baseados no método de Trefftz dependem do problema que se está a resolver, requerendo que as equações governativas no domínio sejam resolvidas (sem condições de fronteira) para que as bases de Trefftz possam ser construídas. Para a maioria dos problemas de Mecânica Estrutural, as formas homogêneas dessas equações têm soluções bem conhecidas. Por outro lado, soluções particulares dessas equações podem ou não existir. No caso da equação de Navier (3.23), as soluções complementares (isso é, da forma homogênea da equação) são conhecidas e serão determinadas de seguida. Soluções particulares analíticas são conhecidas ainda para a generalidade das cargas de vão com expressão analítica. Por outro lado, quando o problema envolve condições iniciais não triviais, soluções particulares podem não existir, ou as suas expressões podem tornar-se proibitivamente complicadas. Para lidar com esta situação, a estratégia adotada neste trabalho é de utilizar as bases de Trefftz para recuperar a solução complementar do problema transitório e as bases polinomiais definidas na secção anterior, para os elementos híbridos, para aproximar a sua solução particular. Quando o problema resolvido é genuinamente homogêneo, as bases de Trefftz recuperam a sua solução exata, conforme discutido na Secção 5.3. Caso contrário, a base não recupera, em geral, a solução exata do problema e as funções de Trefftz funcionam, na prática, como um enriquecimento da base dos elementos híbridos, acrescentando-lhe funções que contêm informação fisicamente relevante acerca do problema que se está a resolver.

A formulação dos elementos finitos híbridos-Trefftz procede assim da formulação de elementos finitos híbridos, às bases dos quais acrescentam-se funções que satisfazem localmente e em cada passo de tempo a equação:

$$E \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \omega^2 \cdot \rho \cdot u(x) = 0 \quad (3.59)$$

Dividindo toda a equação pelo módulo de elasticidade do material, E, obtém-se:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \omega^2 \cdot \frac{\rho}{E} \cdot u(x) = 0 \quad (3.60)$$

Definindo o número de onda  $\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}}$ , a equação (3.60) escreve-se:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot u(x) = 0 \quad (3.61)$$

As funções de aproximação Trefftz são dadas por:

$$\Psi_T = [\sin(\alpha \cdot x) \quad \cos(\alpha \cdot x)] \quad (3.62)$$

e as suas derivadas são,

$$\frac{d\Psi_T}{dx} = [\alpha \cdot \cos(\alpha \cdot x) \quad -\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)] \quad (3.63)$$

Para aproximar a solução particular de problemas transitórios, neste trabalho foram adotados os polinómios de Chebyshev, já descritos na Secção 3.3.4. Então, a base do domínio é definida como,

$$\Psi(x) = [1 \quad x \quad T_2(x) \quad T_2(x) \cdots T_n(x) \quad \sin(\alpha \cdot x) \quad \cos(\alpha \cdot x)] \quad (3.64)$$

sendo  $n$  o grau utilizado nas funções de Chebyshev.

Para a construção do sistema global dos elementos finitos híbridos-Trefftz, procede-se da mesma maneira como nos elementos finitos híbridos, utilizando a mesma condição de compatibilidade inter-elementar (3.55).

No Anexo C encontra-se um exemplo da construção do sistema global de equações referente aos elementos finitos híbridos-Trefftz.





# Capítulo 4

## Implementação computacional

### 4.1 Introdução

Com base nas formulações híbridas apresentadas no Capítulo 3, foi desenvolvida, em ambiente Matlab, uma plataforma computacional para a análise de barras solicitadas axialmente com comportamento elástico. A plataforma utiliza estruturas topológicas de dados para guardar informações sobre a barra e a disposição dos coeficientes no sistema resolutivo global. As estruturas de dados são bastante gerais e flexíveis, podendo servir de base computacional para outros investigadores expandir ou integrar os seus próprios algoritmos.

A opção da utilização do Matlab para o desenvolvimento deste trabalho deve-se ao facto de este ser um software de elevado desempenho no que diz respeito ao cálculo numérico. O Matlab é altamente otimizado para operações vetoriais e tem capacidade de processamento paralelo que mobiliza para efetuar operações computacionalmente dispendiosas, sem intervenção explícita do utilizador. Além disso, os programas desenvolvidos em ambiente Matlab têm uma larga facilidade de manutenção e expansão.

A plataforma computacional tem atualmente capacidade para analisar problemas estáticos, harmónicos e transitórios, com ou sem carga de vão, permitindo uma definição flexível dos elementos, das condições de fronteira, graus de liberdade, carregamentos, condições iniciais e características do material.

Na elaboração da plataforma computacional foram utilizados elementos finitos híbridos, com as bases construídas utilizando monómios  $x^n$  e polinómios de Chebyshev, e elementos finitos híbridos-Trefftz.

Neste capítulo, abordam-se os principais aspetos do desenvolvimento deste programa, aplicando os conceitos mencionados nos capítulos anteriores.

## 4.2 Estrutura do programa

A estrutura de dados é organizada por classes de objetos, com o objetivo de minimizar as limitações na definição das características da estrutura e do material. Existe um ficheiro de input, onde o utilizador insere os dados que pretende e tudo o resto é processado automaticamente.

### 4.2.1 Dados de input

Os dados de input são inseridos pelo utilizador no ficheiro de dados acima referido. São definidas as características da estrutura, os carregamentos e os dados relativos à discretização no tempo, à discretização no espaço e ao pós-processamento. Os dados são guardados em estruturas de dados, que são descritas de seguida.

- Dados relativos à estrutura:

O utilizador deve indicar as características geométricas e do material da estrutura em análise, tal como as cargas de vão e as condições de fronteira, nomeadamente:

- Comprimento total da barra,  $L$ ;
- Módulo de Young,  $E$ ;
- Densidade de massa,  $\rho$ ;
- Tipologia dos nós: Neumann, Dirichlet ou inter-elementar
- Caso existam, deslocamentos impostos nas fronteiras Dirichlet,  $u_\Gamma$  ;
- Caso existam, tensões impostas nas fronteiras Neumann,  $\sigma_\Gamma$  ;
- Carregamento de vão,  $b(x, t)$ .

O programa aceita cargas de vão definidas pelo produto de duas parcelas, uma relativa ao espaço e outra relativa ao tempo,

$$b(x, t) = b_x(x) \cdot b_t(t) \quad (4.1)$$

As definições das componentes  $b_x(x)$  e  $b_t(t)$  são muito flexíveis, podendo ser utilizadas quaisquer expressões analíticas, mesmo que por troços. A mesma flexibilidade existe na definição das condições de fronteira, tanto as envolvendo deslocamentos impostos como forças impostas. No caso, frequente neste trabalho, de se querer analisar as características de convergência e estabilidade dos elementos comparando as soluções

aproximadas com soluções analíticas conhecidas, essas terão de ser também definidas no ficheiro de dados.

- Dados relativos à discretização no tempo:

A discretização no tempo foi implementada aplicando o método de Newmark, como já referido. Para calibrar o algoritmo, o utilizador define:

- Passo de tempo,  $\Delta t$ ;
- Tempo total,  $t$ ;
- Coeficiente que controla a aproximação do campo dos deslocamentos,  $\beta$ ;
- Coeficiente que controla a aproximação do campo de velocidades,  $\gamma$ ;
- Frequência,  $\omega$  (se o problema for harmónico);
- Condições iniciais: deslocamento inicial,  $u_0$ , velocidade inicial,  $v_0$  e aceleração inicial,  $a_0$ .

- Dados da discretização no espaço:

Para resolver o problema definido no espaço, o utilizador pode optar por utilizar elementos finitos híbridos (com bases monomiais ou polinomiais) ou híbridos-Trefftz. Para cada método, o utilizador deve definir:

- O número de elementos que pretende utilizar (refinamento  $h$ );
- O grau das funções de aproximação referente a cada elemento (refinamento  $p$ );
- O número de pontos de integração de Gauss.

- Dados de pós-processamento:

O programa grava, por defeito, os campos de deslocamentos e tensões a cada passo de tempo. Se o utilizador pretender visualizar graficamente os resultados, deverá decidir com que frequência é que os pretende visualizar. Para isso, deve definir a variável *plotfreq*, que especifica a quantos passos de tempos se representam os resultados.

#### 4.2.2 Estruturas de dados

É importante salientar que todos os dados que entram na estrutura de dados são gerados automaticamente, exceto os mencionados acima.

A estrutura de dados é formada por duas classes principais: a classe dos nós e a classe dos elementos. Estas classes dividem-se em subclasses, cujos termos são calculados automaticamente tendo em conta os dados introduzidos pelo utilizador.

A classe dos nós contém informação sobre os nós dos elementos finitos e está organizada em subclasses em que cada membro possui tantas linhas quantos nós tiver a estrutura inteira (número de nós= número de elementos +1):

- Subclasse **nos.x**: determina a posição do nó  $i$  na barra, no referencial global da estrutura;
- Subclasse **nos.elesq**: determina qual o elemento à esquerda do nó  $i$ ;
- Subclasse **nos.eldir**: determina qual o elemento à direita do nó  $i$ ;
- Subclasses relativas às condições de fronteira:
  - **nos.tipo**: determina se o nó  $i$  é do tipo Dirichlet ou interior (D) ou Neumann (N);
  - **nos.BC**: determina a força aplicada ao nó  $i$ .

Por sua vez, a classe dos elementos contém informação sobre os elementos finitos e é constituída por subclasses onde cada membro tem tantas linhas quantos elementos possuir a barra:

- Subclasse **elem.nesq**: determina o nó à esquerda do elemento  $i$ ;
- Subclasse **elem.ndir**: determina o nó à direita do elemento  $i$ ;
- Subclasse **elem.grau**: determina o grau das funções de aproximação do elemento  $i$ .

Com o intuito de demonstrar o funcionamento das estruturas de dados, considere a barra representada na Figura 4.1. A barra possui comprimento total  $L$ , tem uma área da secção transversal  $A$ , está sujeita a uma carga de vão  $f(x, t)$  e tem características do material  $E$  e  $\rho$ . Na extremidade esquerda da barra, a força  $F(t)$  foi aplicada. A barra foi discretizada em 4 elementos finitos do mesmo comprimento  $L_e$ . A verde estão representados os nós e a vermelho os elementos da estrutura.

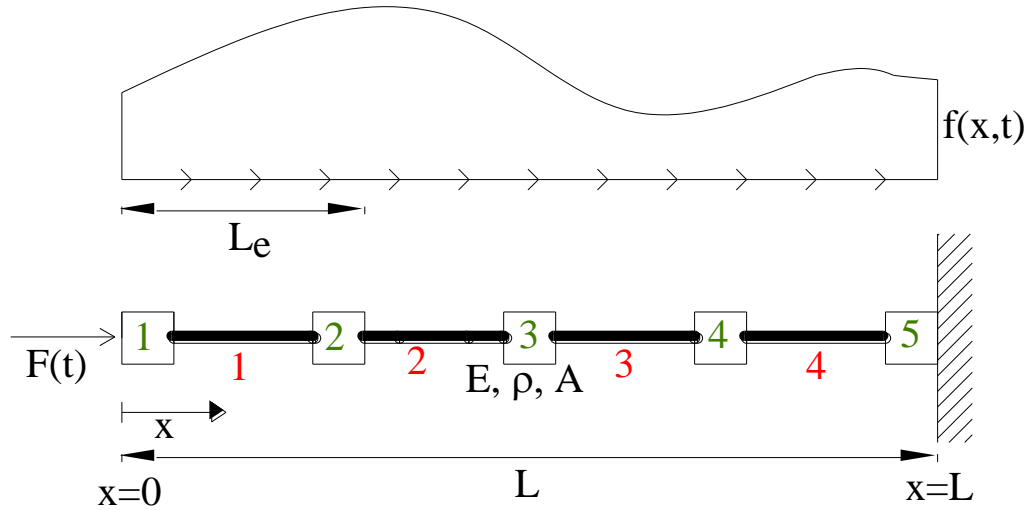


Figura 4.1: Exemplo para demonstrar as estruturas de dados

Começando pela classe dos elementos, visto que a barra está dividida em 4 elementos, as suas subclasses terão 4 linhas:

$$\text{elem.nesq} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \text{elem.ndir} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \text{elem.grau} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

Tomando como exemplo a subclasse elem.ndir, o número em cada linha do vetor corresponde ao nó que se encontra à direita do respetivo elemento, ou seja, o primeiro valor representa o nó à direita do elemento 1, nó 2, o segundo número representa o nó à direita do elemento 2, nó 3, etc. A mesma lógica, desta vez com os nós à esquerda do elemento, é utilizada para construir a subclasse elem.nesq. Quanto à subclasse elem.grau, é o utilizador quem define o grau de liberdade das funções de aproximação, como já referido. Neste caso, optou-se, arbitrariamente, para os elementos 1 e 3 terem funções de terceiro grau e para os elementos 2 e 4 terem funções de quinto grau.

Por sua vez, a classe dos nós tem subclasses com 5 linhas:

$$\text{nos.x} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_e \\ 2L_e \\ 3L_e \\ 4L_e \end{pmatrix}; \quad \text{nos.elesq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \text{nos.eldir} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{nos.tipo} = \begin{pmatrix} 'N' \\ 'D' \\ 'D' \\ 'D' \\ 'D' \end{pmatrix}; \quad \text{nos.BC} = \begin{pmatrix} -\frac{F(t)}{A} \\ NaN \\ NaN \\ NaN \\ 0 \end{pmatrix};$$

Exemplificando com a subclasse `nos.elesq`, o número em cada linha do vetor corresponde ao elemento que se encontra à esquerda do respetivo nó, ou seja, o primeiro valor representa o elemento à esquerda do nó 1, sendo 0 porque não existe nenhum elemento, o segundo valor representa o elemento à esquerda do nó 2 (elemento 1), etc. Relativamente à subclasse condições de fronteira, os nós em que se tem uma tensão aplicada são considerados nós do tipo Neumann e em `nos.BC` aparece a tensão aplicada, respeitando a convenção padrão dos sinais, nomeadamente compressão com sinal negativo e tração com sinal positivo. Os nós onde há deslocamentos impostos são definidos como sendo do tipo Dirichlet. Neste caso em particular, como o deslocamento num encastramento é nulo, em `nos.BC` aparece 0.

Um caso mais peculiar é o dos nós interiores. Para não haver tipologias redundantes de condições de fronteira e, visto que o tratamento algorítmico é idêntico para todos os nós onde não se conhecem as tensões, os nós interiores são tratados como nós de Dirichlet. Quando não se conhecem nem o deslocamento, nem a tensão um determinado nó, em `nos.BC` está predefinido `NaN` (Not a Number) como valor da condição de fronteira.

## 4.3 Cálculo dos elementos do sistema resolvente

Para o cálculo dos elementos do sistema resolvente, foi utilizado o paradigma de programação vetorial, tirando máximo partido das capacidades do ambiente Matlab.

### 4.3.1 Integração numérica

Como mostrado anteriormente, o cálculo de alguns elementos do sistema resolutivo envolve o cálculo de integrais. Contudo, em algumas situações, estes integrais não são fáceis de determinar recorrendo à integração analítica pois a primitiva da função

integranda pode ser demasiado complicada ou a função a integrar pode não ser sequer conhecida analiticamente. Por esta razão, é necessário recorrer a técnicas de integração numérica, sendo o método de integração de Gauss um dos mais utilizados no contexto do método dos elementos finitos.

Quando se usam  $N$  pontos de integração, o método de Gauss integra exatamente polinómios de grau menor ou igual a  $(2N - 1)$ , para uma escolha adequada das abcissas  $x_i$  e pesos  $w_i$  ( $i = \{1, 2, \dots, N\}$ ). Para demonstrar a aplicação deste método aos elementos do sistema que envolvem integrais, considere o elemento representado na Figura 4.2.

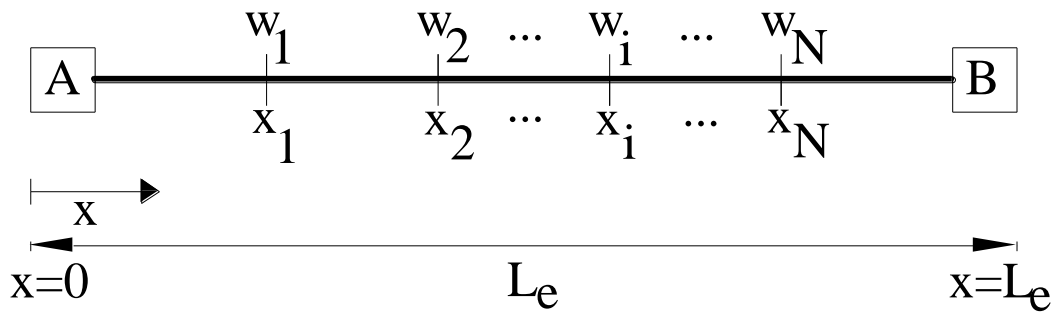


Figura 4.2: Abcissas e pesos de Gauss

O método de integração de Gauss consiste em aproximar o integral de uma função através de um somatório, utilizando a expressão,

$$\int_0^{L_e} f(x) dx = \sum_{i=1}^N f(x_i) \cdot w_i \quad (4.2)$$

A definição do número de pontos de Gauss a considerar é flexível e é feita na estrutura de dados, como já referido.

O método de integração foi aplicado sempre no intervalo  $[-1,1]$  para evitar que as abcissas e os pesos associados sejam calculados repetidamente. Por isso, é necessário fazer uma mudança de referencial, ou seja, passar o integral do referencial original  $[0, L_e]$  para o referencial das abcissas  $[-1,1]$ .

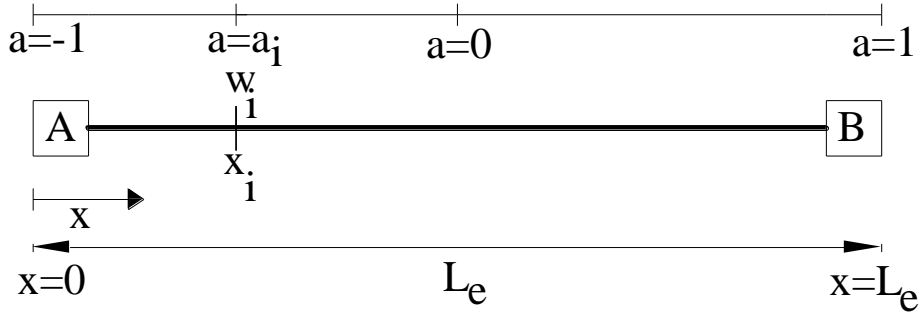


Figura 4.3: Mudança de referencial

Pela Figura 4.3, pode-se observar que entre as coordenadas locais do elemento e as abscissas de Gauss existe a seguinte relação,

$$x = \frac{1}{2} \cdot (a + 1) \cdot L_e \quad (4.3)$$

Para efetuar a mudança de referencial, tem-se então que:

$$dx = \frac{1}{2} \cdot L_e \cdot da \quad (4.4)$$

Sendo assim, a equação (4.2) escreve-se:

$$\int_0^{L_e} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot L_e \cdot \int_{-1}^1 f(x_i(a_i)) da \quad (4.5)$$

Determinado o Jacobiano da transformação do referencial local do elemento para o referencial das abscissas, a integração de Gauss é aplicada ao cálculo dos seguintes elementos do sistema:

- Integral que envolve as cargas de vão:

$$\mathbf{B} = \int_0^{L_e} \boldsymbol{\Psi}^T \cdot b dx = \frac{1}{2} \cdot L_e \cdot \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}^T(a_i) \cdot b(a_i) \cdot w_i \quad (4.6)$$

- Integral que envolve  $f_0$ :

$$\mathbf{F}_0 = \int_0^{L_e} \boldsymbol{\Psi}^T \cdot f_0 dx = \frac{1}{2} \cdot L_e \cdot \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Psi}^T(a_i) \cdot f_0(a_i) \cdot w_i \quad (4.7)$$

- Matriz dinâmica D:

A regra da cadeia aplica-se para transformar a derivada das funções de aproximação do referencial local do elemento para o referencial das abscissas,

$$\frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dx} = \frac{d\boldsymbol{\Psi}}{da} \cdot \frac{da}{dx} = \frac{d\boldsymbol{\Psi}}{da} \cdot \frac{2}{L_e} \quad (4.8)$$

onde a equação (4.4) foi utilizada para calcular  $\frac{da}{dx}$ .

A matriz de rigidez e a matriz de massa (3.49) são, respetivamente, dadas por:

$$\mathbf{K} = \int_0^{L_e} \frac{d\boldsymbol{\Psi}^T}{dx} \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Psi}}{dx} dx = \mathbf{E} \cdot \int_{-1}^1 \frac{d\boldsymbol{\Psi}^T}{da} \cdot \frac{2}{L_e} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Psi}}{da} \cdot \frac{2}{L_e} \cdot \frac{L_e}{2} \cdot da$$



$$= E \cdot \frac{2}{L_e} \cdot \int_{-1}^1 \frac{d\Psi^T}{da} \cdot \frac{d\Psi}{da} \cdot da \quad (4.9)$$

$$\mathbf{M} = \int_0^{L_e} \Psi^T \cdot \rho \cdot \Psi \, dx = \rho \cdot \frac{L_e}{2} \cdot \int_{-1}^1 \Psi^T \cdot \Psi \cdot da \quad (4.10)$$

Assim, a matriz dinâmica (3.50) escreve-se:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{D}}_i \cdot w_i \quad (4.11)$$

em que  $\bar{\mathbf{D}}_i$  é dada por:

$$\bar{\mathbf{D}}_i = \frac{2}{L_e} \cdot \left[ \frac{d\Psi^T}{da} \cdot E \cdot \frac{d\Psi}{da} \right] \Big|_{a=a_i} - \omega^2 \cdot \frac{L_e}{2} \cdot [\Psi^T(a) \cdot \rho \cdot \Psi(a)] \Big|_{a=a_i} \quad (4.12)$$

No caso dos elementos finitos híbridos-Trefftz, a mudança do referencial original para o referencial de Gauss afeta a equação diferencial (3.59) e, por consequência, altera a forma das funções a incluir na base do domínio. Pela equação (4.3) sabe-se que,

$$a = \frac{2}{L_e} \cdot x - 1 \quad (4.13)$$

e, tendo em conta a equação (4.8),

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{da} \cdot \frac{da}{dx} = \frac{du}{da} \cdot \frac{2}{L_e} \quad (4.14)$$

Então, a condição de Trefftz (3.59) passa a escrever-se no referencial das abcissas, como,

$$E \cdot \frac{d^2 u}{da^2} \cdot \left( \frac{2}{L_e} \right)^2 + \omega^2 \cdot \rho \cdot u = 0 \quad (4.15)$$

Multiplicando toda a equação por  $\left( \frac{L_e}{2} \right)^2$  e dividindo por E, obtém-se :

$$\frac{d^2 u}{da^2} + \left( \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \frac{L_e}{2} \right)^2 \cdot u = 0 \quad (4.16)$$

Finalmente, fazendo a notação  $\bar{\alpha} = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \frac{L_e}{2}$ , a equação (4.16) escreve-se:

$$\frac{d^2 u}{da^2} + \bar{\alpha}^2 \cdot u = 0 \quad (4.17)$$

Na prática, a mudança referencial funciona como um fator de escala (igual a  $\frac{L_e}{2}$ ) a aplicar ao número de onda presente na definição das funções de Trefftz (3.62). O referencial das abcissas é ainda utilizado para expressar as funções de Chebyshev, definidas naturalmente no intervalo  $[-1, 1]$ . Por isso, quando se usam elementos finitos híbridos com polinómios de Chebyshev, a mudança do referencial original para o referencial de Gauss nos elementos, implica uma mudança no cálculo do campo de tensão através da derivada do campo de deslocamentos. Assim, obtém-se:

$$\sigma(x, t) = E \cdot \varepsilon(x, t) = E \cdot \frac{du(x, t)}{dx} = \frac{2}{L_e} \cdot E \cdot \frac{du(x, t)}{da} \quad (4.18)$$

### 4.3.2 Construção do sistema resolvente

Para a construção do sistema resolvente foi criado um procedimento automático para determinar as dimensões das matrizes de cada elemento e cada nó e os seus pontos de inserção no sistema global.

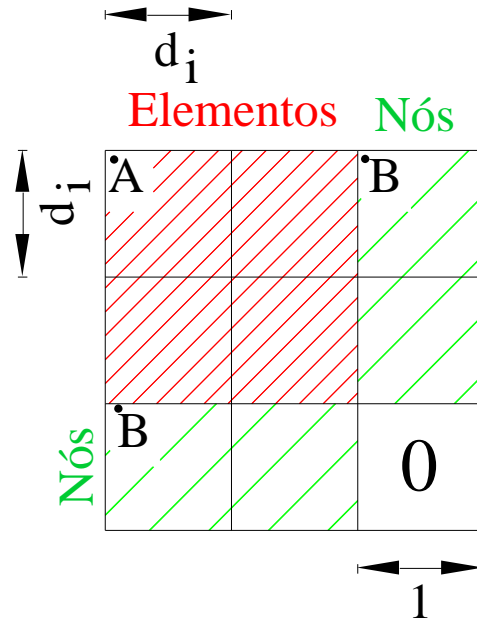


Figura 4.4: Pontos de inserção e dimensões dos elementos e nós na matriz dos coeficientes

As posições de entrada das matrizes dinâmicas associadas aos elementos calculam-se sequencialmente, sabendo que as dimensões das bases de aproximação no domínio ultrapassam em 1 o grau dos polinómios incluídos na base, no caso dos elementos híbridos, mais duas funções no caso dos elementos híbridos-Trefftz.

Depois da construção das matrizes dinâmicas elementares, o programa automaticamente coloca-as na posição correta (começando na posição A), com as respetivas dimensões, como se pode ver na Figura 4.4, onde  $d_i$  representa a dimensão da matriz dinâmica do elemento  $i$ .

Depois de preenchida a zona dos elementos, inicia-se a colocação dos valores relativos aos nós do tipo Dirichlet (posição B). Por se conhecer o nó à esquerda e o nó à direita de

cada elemento sabe-se exatamente onde se devem inserir os vetores ( $\Psi(0)$  ou  $\Psi(L_e)$ ) de cada nó, com o sinal correto, relativo a cada elemento.

Quanto ao vetor livre do sistema resolutivo, o procedimento de inserção dos valores correspondentes aos elementos e aos nós funciona da mesma maneira como na matriz dos coeficientes. Para os nós interiores, o programa insere automaticamente zeros nas entradas correspondentes e para os nós exteriores de Dirichlet (se existirem) insere o deslocamento imposto. A nível da equação de equilíbrio, tendo em conta a dimensão correspondente a cada elemento, o programa calcula  $\Psi(0 \text{ ou } L_e) \cdot \sigma_\Gamma + \mathbf{B} - \mathbf{F}_0$ .

No que diz respeito aos sinais para  $\Psi(0)$  e para  $\Psi(L_e)$ , o programa automaticamente insere:

- Para a matriz dos coeficientes:
  - Se o elemento estiver à direita do nó do tipo Dirichlet:  $\Psi(0)$  com sinal positivo;
  - Se o elemento estiver à esquerda do nó do tipo Dirichlet:  $\Psi(L_e)$  com sinal negativo.
- Para o vetor livre do sistema resolutivo:
  - Se o nó à direita do elemento for do tipo Neumann:  $\Psi(L_e)$  com sinal positivo;
  - Se o nó à esquerda do elemento for do tipo Neumann:  $\Psi(0)$  com sinal negativo.

## 4.4 Pós-processamento

O pós- processamento envolve a reconstrução dos campos dos deslocamentos, das velocidades, das acelerações e das tensões, e também a passagem de um passo de tempo para o seguinte, caso o problema seja transitório.

Depois de calcular os deslocamentos generalizados  $\mathbf{q}$ , para cada passo de tempo, o programa procede, automaticamente, ao cálculo dos campos das soluções, à gravação dos mesmos e (se for solicitado) à representação dos campos desejados.

- Cálculo das soluções

O cálculo dos campos dos deslocamentos, das velocidades, das acelerações e das tensões realiza-se nos pontos de Gauss, em coordenadas locais.

O campo dos deslocamentos é calculado utilizando a relação,

$$u(x) = \Psi(x) \cdot \mathbf{q} \quad (4.19)$$

Por sua vez, o campo das velocidades e o campo das acelerações são calculados utilizando, respetivamente, as equações (3.2) e (3.18). Quanto ao cálculo das tensões, para os elementos finitos híbridos com monómios  $x^n$  utiliza-se a equação (3.35) e para os elementos finitos híbridos com polinómios de Chebyshev e elementos finitos híbridos-Trefftz recorre-se à equação (4.18).

Depois de concluída a análise e calculados os campos de deslocamentos, velocidades e acelerações, os valores dos mesmos nos pontos de integração de Gauss são guardados numa estrutura de dados especialmente criada para este efeito, sendo utilizados como condições iniciais no passo de tempo seguinte.

- Representação dos campos desejados

A representação gráfica dos campos das soluções é gerida consoante às preferências do utilizador, que tem a opção de representar apenas os campos que deseja, nos instantes em que o deseja.

Finalmente, um procedimento automático gera em cada passo de tempo um ficheiro de texto contendo informações relativas às soluções aproximadas de deslocamentos e tensões geradas pelo programa e (se existirem) às soluções analíticas do problema, introduzidas pelo utilizador, que posteriormente serve de arquivo compatível com o programa de geração de gráficos Tecplot.

A plataforma desenvolvida possui ainda uma rotina onde é calculado o erro associado à solução aproximada gerada pelo método dos elementos finitos. O procedimento de cálculo desse erro será explicado no capítulo seguinte.

# Capítulo 5

## Resultados numéricos

### 5.1 Introdução

Com vista à aplicação dos conceitos abordados nos capítulos anteriores, neste capítulo são testados, avaliados e validados os elementos finitos híbridos com bases monomiais e Chebyshev e os elementos híbridos-Trefftz. Os resultados são analisados do ponto de vista da sua convergência e comparados com resultados equivalentes obtidos utilizando o programa de elementos finitos conformes de deslocamentos SAP2000. São testados, por esta ordem, elementos finitos não convencionais para problemas estáticos, harmónicos e transitórios, com e sem solução analítica.

Normalmente, as soluções fornecidas pelo método dos elementos finitos para um dado problema são diferentes das soluções exatas. Essa diferença representa o erro. Os erros são tipicamente causados por três fontes principais. A primeira causa prende-se com um nível de discretização demasiado grosseiro (refinamento  $h$  insuficiente). Esse problema é a principal fonte de erro nos elementos finitos convencionais, principalmente quando o número de nós de cada elemento não é muito alto. Embora o refinamento  $h$  insuficiente seja um problema tipicamente associado à discretização no espaço, a escolha de um passo de tempo demasiado grande provoca efeitos do mesmo tipo no domínio do tempo. A segunda fonte de erro prende-se com a falta de qualidade das bases de aproximação dos elementos (refinamento  $p$  insuficiente). Ao contrário dos elementos finitos conformes de deslocamento, onde incrementar o refinamento da base de aproximação obriga à total redefinição do elemento, no caso dos elementos híbridos o refinamento  $p$  apenas requer acrescentar novas funções de aproximação, sem necessidade de recalculas as anteriores. Essa vantagem, aliada a uma taxa de convergência bastante elevada, faz com que o refinamento  $p$  seja tipicamente o refinamento predileto nos elementos híbridos. Por consequência, o estudo da convergência sob refinamento da base de aproximação reveste-

se de uma relevância particular no caso dos elementos focados neste trabalho. Finalmente, a terceira fonte de erro prende-se com os erros de precisão numérica associados a operações como a integração numérica e solução do sistema governativo. Este tipo de erro não será focado neste capítulo. No entanto, a implementação das bases de Chebyshev foi efetuada para melhorar o condicionamento do sistema, enquanto que a precisão da integração é garantida através da adoção de um número suficientemente grande de pontos de Gauss (tipicamente, 10 pontos de Gauss são usados por intervalo, chegando até 30 no caso de funções de Trefftz altamente oscilatórias).

O estudo das taxas de convergência sob refinamentos  $h$  e  $p$  será o foco principal deste capítulo. Os resultados aproximados obtidos pelos elementos finitos serão comparados com soluções exatas conhecidas, calibradas de maneira a controlar o nível de dificuldade numérica do problema. Finalmente, dois problemas envolvendo a propagação de ondas de choque serão resolvidos e os resultados comparados com os obtidos pelo programa SAP2000.

## 5.2 Problema estático

O problema estático é obtido a partir da equação (3.23), anulando a frequência  $\omega$  e as condições iniciais, obtendo-se assim:

$$E \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + b(x) = 0 \quad (5.1)$$

Esta equação será resolvida de seguida utilizando elementos finitos híbridos com base monomial. Será feita uma análise comparativa entre o desempenho numérico destes elementos e o dos elementos finitos convencionais, focando, nomeadamente, as taxas de convergência sob refinamentos  $h$  e  $p$ . Tendo em conta que as soluções homogêneas da equação (5.1) são 1 e  $x$ , sendo obviamente contidas sempre na base monomial, não há, nesta situação, nenhuma distinção entre os elementos híbridos e híbridos-Trefftz.

### 5.2.1 Critérios de convergência e qualidade da solução

É de grande importância identificar se o campo de deslocamentos obtido utilizando o método dos elementos finitos conduz a resultados que convergem para a solução exata à

medida que são aplicados refinamentos. Este problema tem sido estudado por muitos autores (por exemplo [36], [37] e [38]), levando à formulação de critérios de convergência que devem ser cumpridos pelos elementos de barra. Assim, para que haja convergência da solução obtida pelo método dos elementos finitos para a solução exata, o elemento deve ser capaz de recuperar perfeitamente o deslocamento de um corpo rígido. Se o elemento tiver essa capacidade, o mesmo irá recuperar a solução exata quando o seu comprimento tende para zero, isto é, quando o elemento converge para um ponto. Para verificar se o elemento conforme apresentado na Secção 3.3.3 satisfaz esse critério, considere um elemento convencional de  $N$  nós, onde todos os nós apresentam o mesmo deslocamento,  $u_{exato} = \Delta$ . O critério de convergência estipula que,

$$\begin{aligned} u_{aprox} &= u_1 \cdot \psi_1(x) + u_2 \cdot \psi_2(x) + \dots + u_N \cdot \psi_N(x) = \\ &= \Delta \cdot \psi_1(x) + \Delta \cdot \psi_2(x) + \dots + \Delta \cdot \psi_N(x) = u_{exato} = \Delta \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $u_{aprox}$  é o deslocamento aproximado obtido utilizando o método dos elementos finitos. Eliminado  $\Delta$  por ser arbitrário e comum a todos os membros, obtém-se,

$$\sum_{i=1}^N \psi_i(x) = 1 \quad (5.3)$$

A expressão (5.3) define matematicamente o critério de convergência acima mencionado e designa uma propriedade das bases de aproximação do elemento convencional chamada de partição da unidade. Exemplificando com o elemento finito cujas funções de aproximação foram derivadas na Secção 3.3.3, facilmente pode-se verificar que a soma das funções de aproximação resulta igual a 1, verificando-se assim esta propriedade. No caso dos elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz, tendo em conta que os pesos não são deslocamentos nodais, uma relação do tipo (5.2) não se pode escrever. No entanto, a capacidade de recuperar deslocamento de corpo rígido é garantida visto que a função 1 (função com grau  $n = 0$ ) está sempre contida na base de aproximação, conforme mostrado nas Secções 3.3.4 e 3.3.5.

A melhoria da qualidade da solução pode ser feita recorrendo aos refinamentos h e p. O refinamento h consiste em aumentar o número de elementos finitos na barra, enquanto que o refinamento p consiste em aumentar o grau (e, consequentemente, o número) das funções de aproximação das bases dos elementos. Um dos objetivos deste trabalho será avaliar a eficiência relativa dos dois tipos de refinamento, tendo em conta a melhoria que provocam na solução, através da quantificação das taxas de convergência. Para avaliar a taxa de convergência, é necessário avaliar o erro relativo da solução mediante a variação

dos refinamentos mencionados. Neste trabalho o erro relativo da solução obtida pelo método dos elementos finitos é calculado pela seguinte expressão:

$$\epsilon = \frac{\int_0^L |u_{aprox} - u_{exato}| dx}{\int_0^L |u_{exato}| dx} \quad (5.4)$$

Para os elementos finitos convencionais, a taxa de convergência controla a ordem da diminuição do erro originada na sequência de um refinamento de malha. Essa ordem é conhecida [36] e pode ser estimada através da relação:

$$O = h^{p+1} \quad (5.5)$$

em que  $h$  corresponde ao número de vezes que o comprimento ( $L_e$ ) dos elementos é reduzido e  $p$  representa o grau das funções de aproximação que é usado nos elementos [39]. Por exemplo, tendo em conta a Figura 5.1, reduzindo a dimensão de um elemento para metade ( $h=2$ ) e utilizando funções de aproximação lineares ( $p=1$ ), o erro vai sofrer uma redução na ordem de  $O = 2^{1+1} = 4$  vezes.

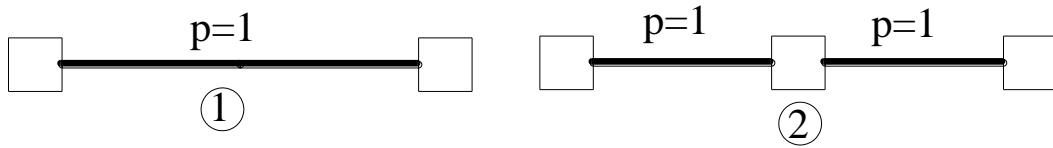


Figura 5.1: Exemplo de refinamento de malha

A diminuição do erro é condicionada por muitos fatores a ter em consideração aquando da escolha do refinamento a adotar (por exemplo um refinamento uniforme pode não ser sempre a melhor solução), mas a expressão (5.5) fornece uma boa estimativa da melhoria que se pode esperar quando se procede ao refinamento de uma malha de elementos finitos convencionais.

Em alternativa, para haver uma diminuição do erro pode-se aumentar o grau das funções de aproximação no domínio do elemento. Quando as funções de aproximação são condicionadas pelos nós, esse procedimento obriga, geralmente, ao aumento do número de nós, com a consequente redefinição de todas as funções de aproximação do elemento. Para facilitar a escolha do refinamento a adotar, é importante referir algumas vantagens e desvantagens da utilização dos dois tipos de refinamento, como mostrado na Tabela 5.1:



Refinamento	Vantagens	Desvantagens
Refinamento h (aumentar o número de elementos finitos)	<p>→ Permite fazer refinamento localizado;</p> <p>→ É relativamente fácil implementar computacionalmente um processo adaptativo de refinamento.</p>	<p>→ Taxas de convergência menores que no refinamento p;</p> <p>→ Comparando com o refinamento p, para se chegar a mesma qualidade da solução, necessita de mais graus de liberdade, o que implica um aumento do tempo computacional;</p>
Refinamento p (aumentar o grau das funções de aproximação)	<p>→ Taxas de convergência maiores do que no refinamento h;</p> <p>→ Em comparação com o refinamento h, necessita de menos graus de liberdade para chegar à mesma qualidade da solução.</p>	<p>→ Normalmente, é difícil utilizar elementos diferentes na mesma estrutura, o que dificulta o refinamento localizado;</p> <p>→ Obriga à reformulação do elemento.</p>

Tabela 5.1: Vantagens e desvantagens dos refinamentos h e p, nos elementos convencionais

Conclusões diferentes poderão ser obtidas para a eficiência relativa dos refinamentos p e h no caso dos elementos híbridos, visto que a completa redefinição das funções de aproximação quando se procede ao refinamento p deixa de ser necessária. Os testes numéricos apresentados nas Secções 5.2.2 e 5.3.1 são concebidos para permitir avaliar o desempenho dos elementos finitos híbridos e compará-lo com o dos elementos finitos convencionais.

Para permitir a comparação direta das eficiências dos refinamentos p e h nos elementos não-convencionais, o conceito de taxa de convergência  $k$  é definido como sendo a

inclinação do gráfico que relaciona o logaritmo do erro com o logaritmo do número total de graus de liberdade (Figura 5.2).

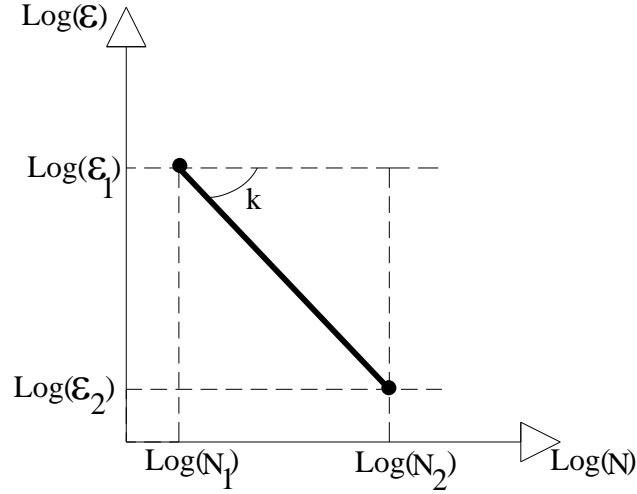


Figura 5.2: Taxa de convergência,  $k$

Assim, pela Figura 5.2 pode-se escrever que<sup>1</sup>:

$$\log(\epsilon) = C - k \cdot \log(N) \Leftrightarrow \epsilon = (10^{\log(N)})^{-k} \Leftrightarrow \epsilon = N^{-K} \quad (5.6)$$

A expressão (5.6) relaciona a taxa de convergência com o erro relativo e com o número de graus de liberdade do sistema e, por isso, permite avaliar a ordem de diminuição do erro quando é aumentado  $h$  vezes o número de graus de liberdade. Com efeito, considerando  $N_2 = h \cdot N_1$  pode-se encontrar uma relação entre o erro  $\epsilon_1$  obtido para o refinamento  $N_1$  e o erro  $\epsilon_2$  obtido para o refinamento  $N_2$ , como mostrado na expressão (5.7):

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 = N_1^{-k} \\ \epsilon_2 = (h \cdot N_1)^{-k} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{1}{h^{-k}} \Rightarrow \epsilon_1 = h^k \cdot \epsilon_2 \quad (5.7)$$

Visto isto, pode-se escrever uma expressão semelhante à expressão (5.5), que servirá de comparação entre os elementos finitos convencionais e os elementos finitos híbridos:

$$O = h^k \quad (5.8)$$

Claramente, para os elementos convencionais,  $k = p + 1$ .

<sup>1</sup> A constante  $C$  aparece na expressão (5.6) pois o gráfico da Figura 5.2 não passa pela origem do referencial. No entanto, para efeitos de cálculo da inclinação, a constante não tem importância e pode ser excluída da expressão.

### 5.2.2 Definição do problema

Para se analisar a qualidade das soluções obtidas com elementos finitos híbridos em barras que se encontram em equilíbrio estático, considere a barra representada na Figura 5.3. A barra possui comprimento total  $L$ , tem uma área de secção transversal  $A$ , está sujeita a uma carga de vão  $f(x)$  e tem características do material  $E$  e  $\rho$ . A barra tem ainda uma fronteira encastrada em  $x = 0$  ( $u_{\Gamma} = 0$ ) e uma fronteira livre em  $x = L$  ( $F_{\Gamma} = 0$ ). Para simplificar a definição das forças de vão, e sem prejuízo da generalidade das conclusões, a área da secção transversal é considerada unitária.

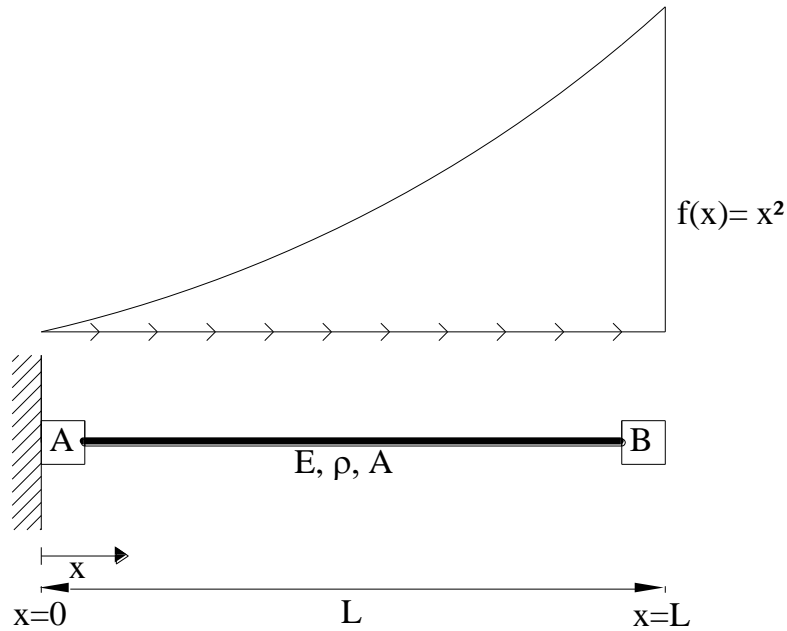


Figura 5.3: Problema estático

O problema definido na Figura 5.3 tem uma solução exata fácil de se obter, que será utilizada na quantificação do erro. Assim, o campo de deslocamentos exato é obtido integrando a equação (5.1), com a carga de vão  $f(x) = x^2$ :

$$\begin{aligned} E \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + x^2 &= 0 \Leftrightarrow \frac{du(x)}{dx} = -\frac{x^3}{3 \cdot E} + C_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u(x) &= -\frac{x^4}{12 \cdot E} + C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  são calculadas impondo as condições de fronteira da estrutura. Pelo encastramento no nó A,

$$u(0) = 0 \quad (5.10)$$

logo a constante  $C_2$  resulta nula.

Por não existir nenhuma força aplicada no nó B, pode-se escrever que,

$$\sigma_L = \sigma(L) = 0 \quad (5.11)$$

Tendo em conta que a tensão é dada por:

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x) = E \cdot \frac{du(x)}{dx} \quad (5.12)$$

a constante  $C_1$  pode ser facilmente calculada:

$$\sigma(L) = E \cdot \left( -\frac{L^3}{3 \cdot E} + C_1 \right) = 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{L^3}{3 \cdot E} \quad (5.13)$$

Assim, o campo dos deslocamentos e o campo das tensões analíticos deste problema, são dados, respetivamente, por:

$$u(x) = \frac{1}{3 \cdot E} \cdot \left( -\frac{x^4}{4} + L^3 \cdot x \right) \quad (5.14)$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{3} \cdot (-x^3 + L^3) \quad (5.15)$$

Assumindo, arbitrariamente, que o comprimento total da barra é  $L = 1$ , o módulo de elasticidade  $E = 1$  e a densidade de massa  $\rho = 1$ , os campos dos deslocamentos e das tensões analíticos encontram-se representados na Figura 5.4.

Para modelar este problema foram utilizados elementos finitos híbridos com monómios de grau  $n$  ( $x^n$ ) (utilizando os polinómios de Chebyshev obtiveram-se resultados idênticos).

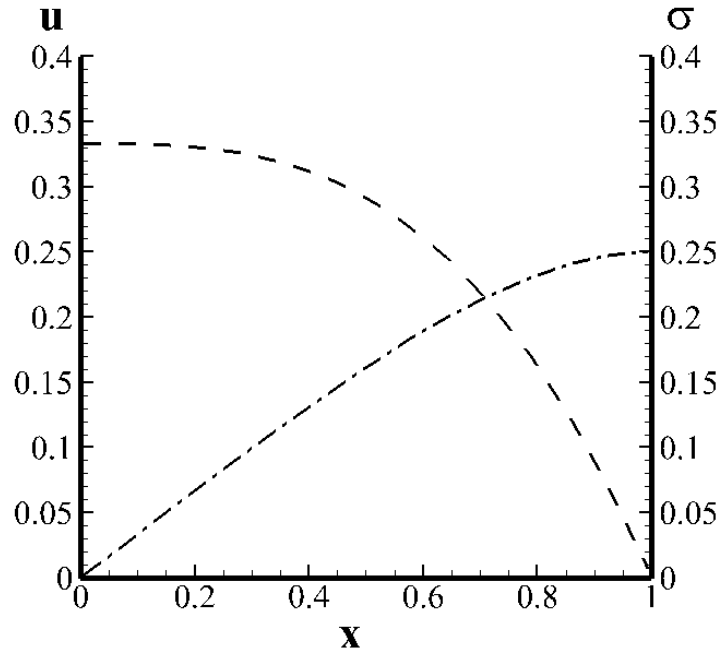


Figura 5.4: Solução analítica dos deslocamentos (---) e das tensões (----) para o problema estático

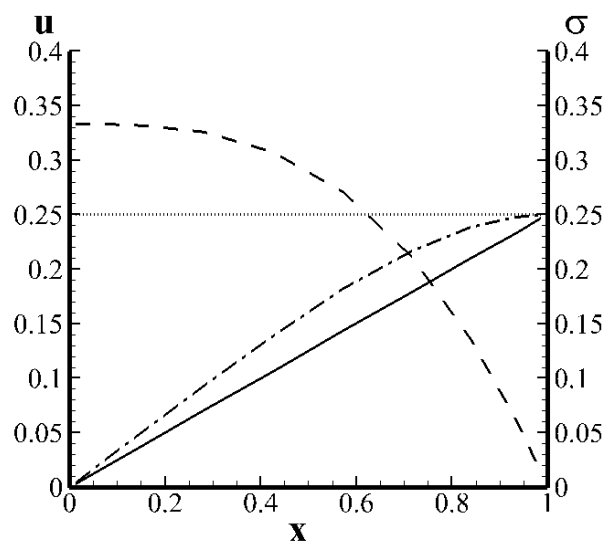
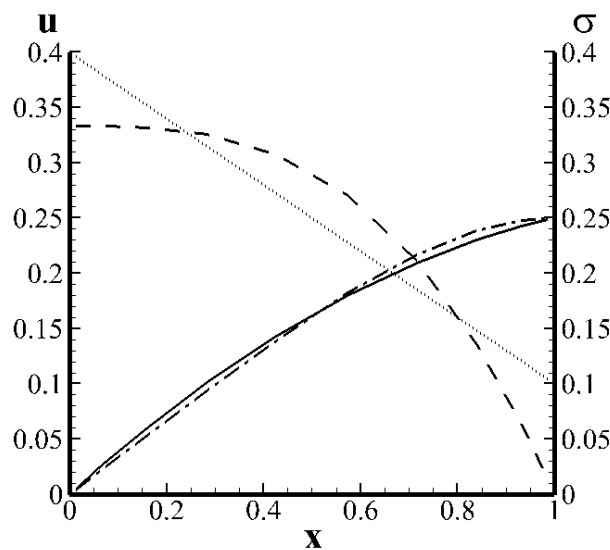
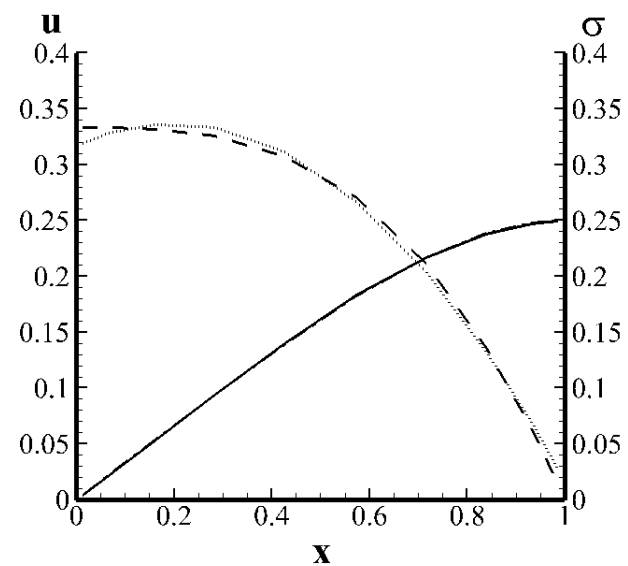
### 5.2.3 Resultados

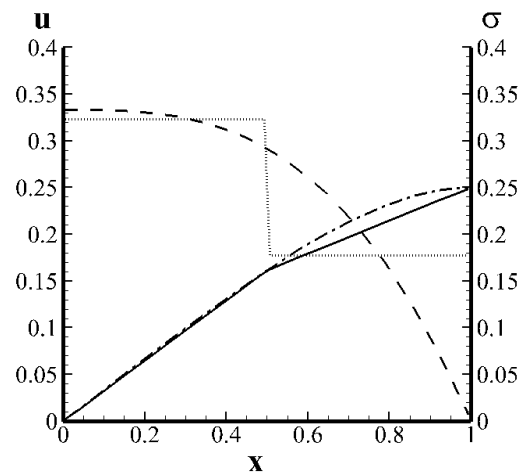
Na Figura 5.5 encontram-se representados os campos dos deslocamentos e das tensões obtidos utilizando elementos finitos híbridos. Para se analisar visualmente o processo de convergência, estão representados em cada gráfico da figura as soluções analíticas e aproximadas dos deslocamentos e das tensões. Além disso, em cada gráfico é mencionado o grau das funções de aproximação utilizado ( $p$ ) e o número de elementos considerados na barra ( $h$ ). Nas abcissas de cada gráfico estão representadas as coordenadas globais ( $x$ ) e nas ordenadas os deslocamentos e tensões analíticos. Para a elaboração destes gráficos foram consideradas barras com um, dois, três, quatro e cinco elementos e funções de aproximação do primeiro, segundo e terceiro grau. Note-se que a solução exata (5.14) é do 4º grau, logo nunca será perfeitamente recuperada com os refinamentos adotados.

Analizando os gráficos da Figura 5.5 relativos a  $p=1$ , verifica-se que tanto as aproximações dos deslocamentos como (principalmente) as das tensões são relativamente fracas. Com efeito, apesar de recuperar os deslocamentos nas fronteiras, a solução apresenta um campo de deslocamentos linear e, conseqüentemente, um campo de tensões constante, não refletindo os campos analíticos reais. À medida que os níveis de refinamento são aumentados, as soluções aproximadas convergem para as analíticas, mas as taxas de convergência são diferentes para os refinamentos  $h$  e  $p$  e para os campos de deslocamentos e de tensões.

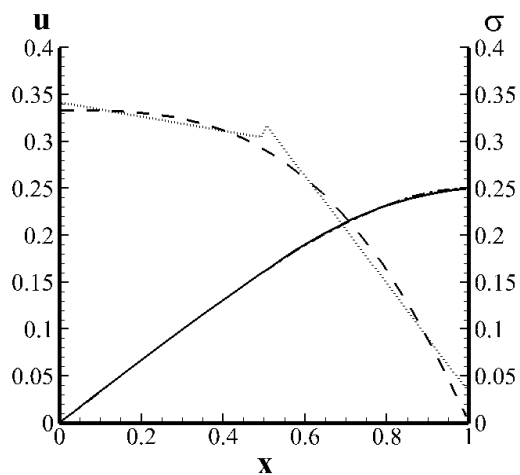
Da observação de todos os gráficos, pode-se inferir que para se obter soluções de deslocamentos e tensões mais próximas das soluções analíticas é necessário aumentar em simultâneo os refinamentos  $p$  e  $h$ . À medida que é feito esse aumento, pode-se observar que os deslocamentos aproximam-se mais facilmente da solução analítica do que as tensões. Por exemplo, utilizando apenas um elemento e variando o grau das funções de aproximação ou utilizando apenas o primeiro grau das funções de aproximação e variando o número de elementos pode-se verificar que os deslocamentos aproximam-se bastante do deslocamento analítico, mas o mesmo não se pode afirmar das tensões que precisam de mais refinamento para chegar ao mesmo nível de precisão. Nestes gráficos observam-se também descontinuidades de tensões, principalmente para graus de refinamento baixos, o que não acontece nos deslocamentos pois os elementos são localmente

Deslocamento analítico (exato)	-----
Deslocamento aproximado	————
Tensão analítica (exata)	-----
Tensão aproximada	.....

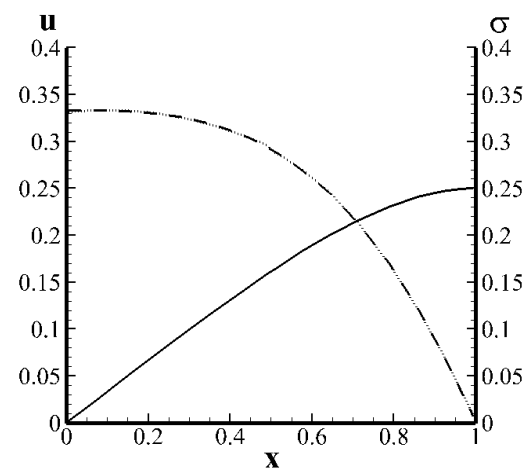
a)  $p=1$ ;  $h=1$ b)  $p=2$ ;  $h=1$ c)  $p=3$ ;  $h=1$



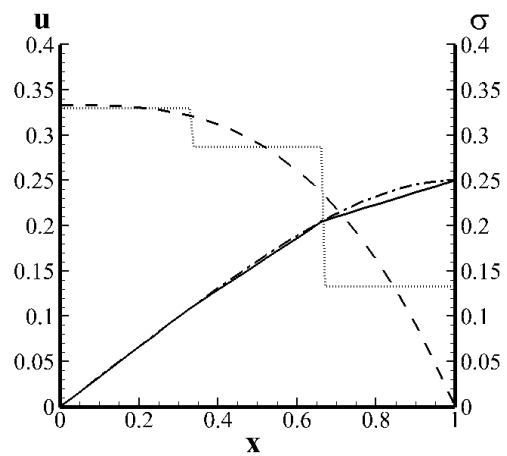
d)  $p=1; h=2$



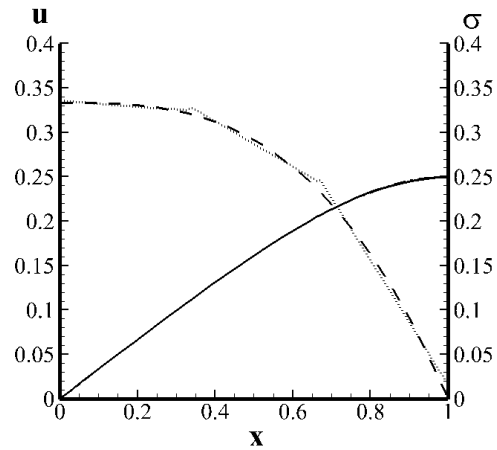
e)  $p=2; h=2$



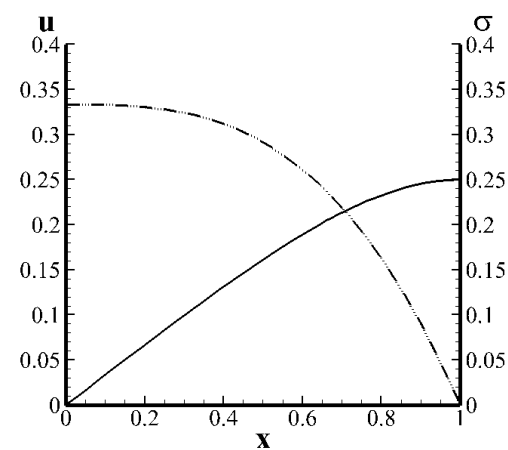
f)  $p=3; h=2$



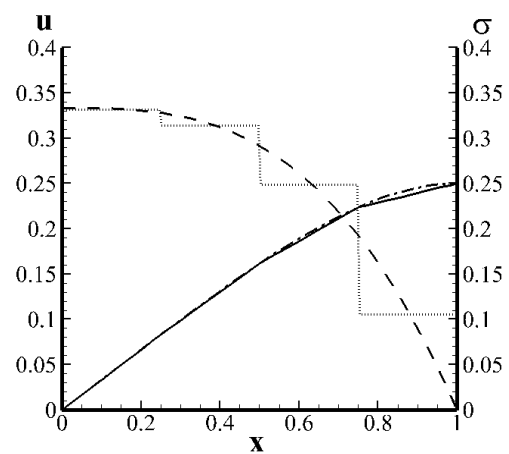
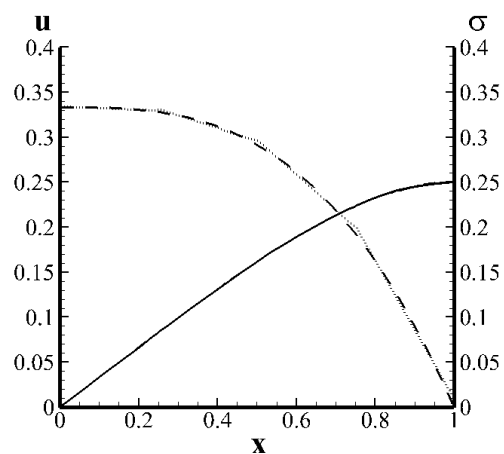
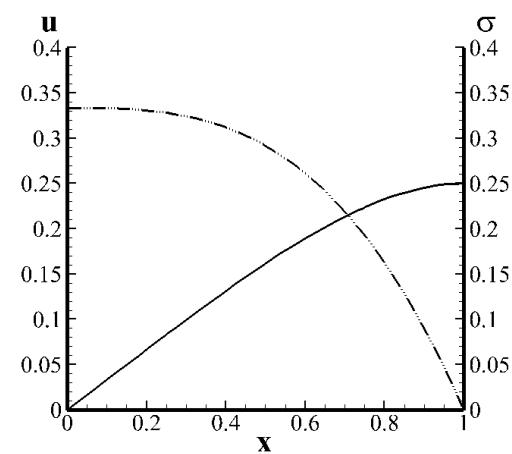
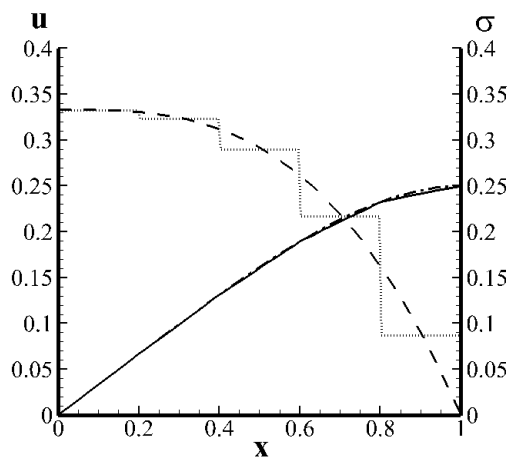
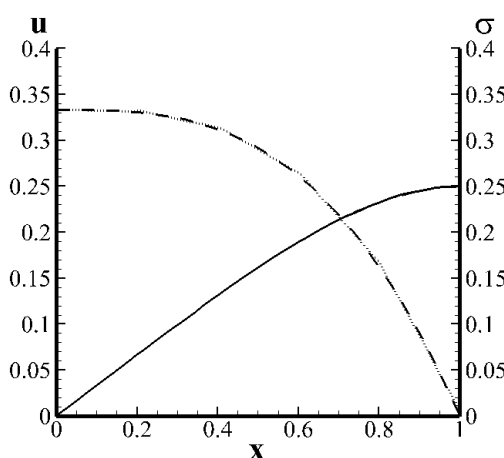
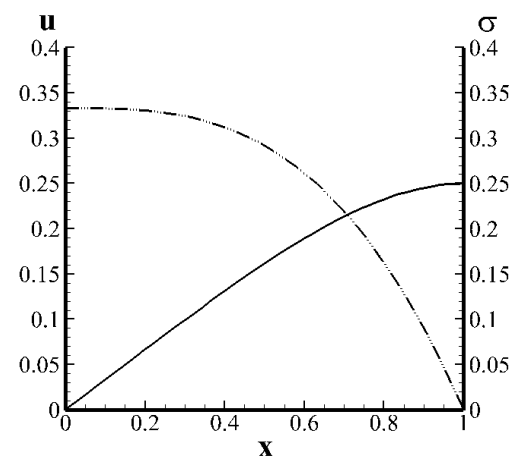
g)  $p=1; h=3$



h)  $p=2; h=3$



i)  $p=3; h=3$

j)  $p=1$ ;  $h=4$ k)  $p=2$ ;  $h=4$ l)  $p=3$ ;  $h=4$ m)  $p=1$ ;  $h=5$ n)  $p=2$ ;  $h=5$ o)  $p=3$ ;  $h=5$ Figura 5.5: Resultados aproximados dos deslocamentos e das tensões utilizando refinamentos  $h$  e  $p$



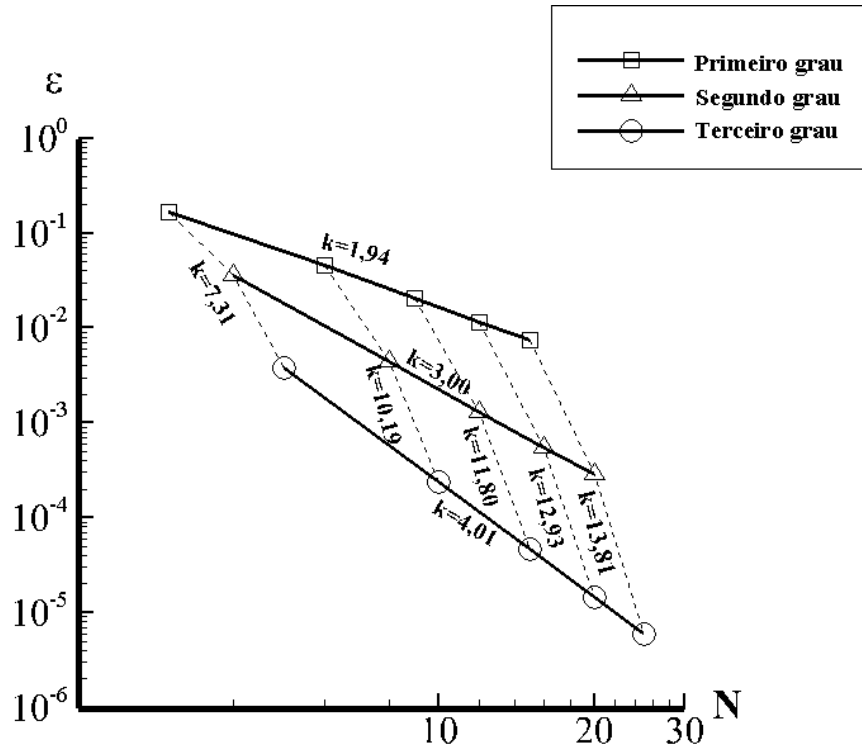


Figura 5.6: Convergência da solução dos deslocamentos sob refinamentos  $p$  e  $h$

compatíveis. Note-se que as formulações híbridas não impõem o equilíbrio inter-elementar (3.32), pelo que o mesmo só é atingido quando há convergência.

Para se realizar uma análise quantitativa dos resultados obtidos, são apresentados na Figura 5.6 os gráficos de convergência correspondentes às soluções representadas na Figura 5.5, utilizando o erro das aproximações dos deslocamentos, calculado pela definição (5.4). Os valores nas abcissas correspondem ao número de graus de liberdade do sistema ( $N$ ) e os valores nas ordenadas representam valores dos erros relativos ( $\epsilon$ ). Ambos os eixos são logarítmicos. No gráfico, as linhas contínuas correspondem à convergência sob refinamento  $h$ , utilizando o mesmo refinamento  $p$ , ou seja, utilizando o mesmo grau das funções de aproximação, e as linhas a tracejado representam a convergência  $p$ , usando o mesmo refinamento  $h$ , ou seja, utilizando o mesmo número de elementos na barra. Analisando a figura pode-se observar que para uma dada dimensão do sistema os erros relativos baixam conforme se utilizem funções de aproximação do primeiro, segundo ou terceiro grau. Os valores das taxas de convergência sob refinamentos  $h$  e  $p$  foram obtidos pela metodologia detalhada na Secção 5.2.1. No caso do refinamento  $p$ , onde a inclinação do gráfico muda de um ponto para o próximo, uma

interpolação linear foi feita entre os 3 valores calculados. As taxas de convergência obtidas estão ilustradas na Figura 5.6, ao lado dos gráficos correspondentes.

Pelos valores obtidos, pode-se dizer que a taxa de convergência sob refinamento  $p$  é claramente superior à taxa de convergência sob refinamento  $h$ . No entanto, observa-se também que as taxas de convergência sob refinamento  $h$  aumentam à medida que se aumenta o grau das funções de aproximação e as taxas de convergência sob refinamento  $p$  aumentam à medida que se aumenta o número de elementos, podendo-se assim afirmar que os dois refinamentos potenciam-se um ao outro.

Conforme mostrado na Secção 5.2.1, nos elementos convencionais a taxa de convergência sob refinamento  $h$  utilizando funções de aproximação do primeiro, segundo e terceiro grau tem o valor de 2, 3 e 4 respetivamente. Como se pode observar na Figura 5.6, os valores obtidos utilizando elementos finitos híbridos,  $k=1,94$ ,  $k=3,00$  e  $k=4,01$ , igualam os elementos finitos convencionais no que diz respeito à convergência sob refinamento  $h$ .

### 5.3 Problema harmónico

Os problemas harmónicos são problemas do tipo (2.1) a (2.3) nos quais todos os campos têm uma variação harmónica no tempo,

$$\alpha(x, t) = \alpha_x(x) \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (5.16)$$

onde  $\alpha$  representa qualquer campo envolvido nas equações (2.1) a (2.3) e  $\omega$  é a frequência de vibração do sistema. Problemas harmónicos surgem naturalmente nas estruturas atuadas por vibrações causadas, por exemplo, por motores excêntricos, depois de um curto período inicial transitório (tipicamente não considerado na análise). Substituindo as expressões do tipo (5.16) na equação (2.4), todos os termos dependentes do tempo cancelam-se e a equação de Navier assume a sua forma espectral:

$$E \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + b(x) + \omega^2 \cdot \rho \cdot u(x) = 0 \quad (5.17)$$

É possível observar que o problema espectral (5.17) é equivalente ao problema transitório (3.23) com condições iniciais nulas e frequência real.

O desempenho dos elementos híbridos na resolução do problema (5.17) vai ser analisado a seguir. Para além da quantificação das taxas de convergência sob

refinamentos  $h$  e  $p$ , é de interesse, em problemas harmónicos, avaliar a sensibilidade dos elementos à diminuição do comprimento de onda  $\lambda$ .

### 5.3.1 Definição do problema

O problema espectral que se vai analisar tem como soluções analíticas de deslocamentos e tensões, respetivamente, as seguintes expressões:

$$u(x) = \sin(\omega \cdot x) \quad (5.18)$$

$$\sigma(x) = E \cdot \frac{du(x)}{dx} = \omega \cdot E \cdot \cos(\omega \cdot x) \quad (5.19)$$

Substituindo a expressão dos deslocamentos (5.18) na equação (5.17) e isolando o termo  $b(x)$ , pode-se obter a expressão do quociente entre a carga de vão a que a estrutura é sujeita e a área da secção transversal:

$$b(x) = \frac{f(x)}{A} = \omega^2 \sin(\omega \cdot x) \cdot (-\rho + E) \quad (5.20)$$

O problema acima definido é formulado utilizando uma larga gama de frequências, de maneira a controlar o seu grau de dificuldade numérica através do número de comprimentos de onda que se obtêm ao longo do comprimento total da barra.

O problema é analisado considerando a barra representada na Figura 5.7. A barra possui comprimento total  $L = 2\pi$ , tem uma área de secção transversal  $A$  unitária, está sujeita a uma carga de vão  $f(x)$  e tem características do material  $E = \rho = 1$ . A barra possui uma fronteira encastrada em  $x = 0$  ( $u_{\Gamma} = 0$ ) e uma fronteira livre em  $x = 2\pi$ , onde está aplicada a força,  $F = \sigma(x = 2\pi) = \omega$ . A carga de vão (5.20) resulta nula.

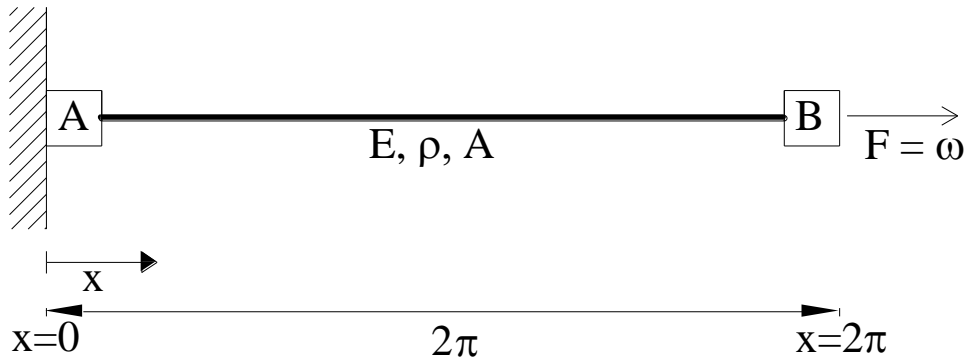


Figura 5.7: Problema espectral

Os diagramas das soluções analíticas de deslocamentos e tensões para uma frequência unitária são os representados na Figura 5.8.

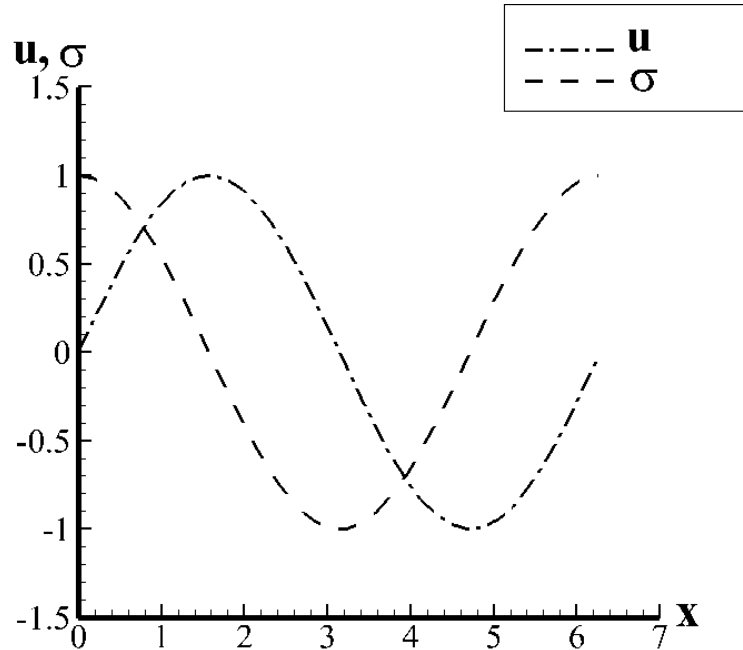


Figura 5.8: Soluções analíticas dos deslocamentos e das tensões para o problema harmônico

Para a análise do problema harmônico são utilizados elementos finitos híbridos com as bases construídas com monômios de grau  $n$  ( $x^n$ ). Sendo o problema modelado genuinamente homogêneo, as soluções obtidas com elementos finitos híbridos-Trefftz recuperam exatamente a solução analítica e, por esse motivo, não é relevante a análise dos resultados obtidos com os mesmos. Os resultados obtidos utilizando elementos híbridos com bases Chebyshev são idênticos aos obtidos com bases monomiais.

### 5.3.2 Resultados

Para descrever com suficiente precisão a variação no espaço de campos oscilatórios através de elementos finitos construídos com funções lineares, um preceito frequentemente aplicado afirma que pelo menos 6, mas preferencialmente 10 elementos lineares devem ser utilizados por comprimento de onda  $\lambda$  [40]. Considerou-se interessante

avaliar, utilizando o problema harmónico definido na secção anterior, como se altera esta regra à medida que o grau das funções de aproximação utilizadas na base dos elementos híbridos aumenta.

Então, tendo como erro de referência  $\epsilon = 5\%$ , que é o erro obtido utilizando 10 elementos por comprimento de onda e funções de aproximação do primeiro grau, foi averiguado quantos elementos por comprimento de onda seriam necessários para obter erros semelhantes (e nunca superiores) se o grau das funções de aproximação no domínio fosse aumentado do primeiro para o quarto. Os resultados, convenientemente arredondados para servir de referência em problemas práticos, estão listados na Tabela 5.2.

A partir dos resultados da Tabela 5.2, construiu-se o gráfico da Figura 5.9 que mostra quantos elementos por comprimento de onda  $\lambda$  são necessários para se obter um erro menor ou igual ao erro de referência, quando se usam bases de funções de aproximação mais refinadas. Na figura estão representados na abcissa o grau das funções de aproximação e na ordenada o número de elementos por comprimento de onda.

Grau das funções de aproximação	Nº de elementos por comprimento de onda	Erro relativo
1	10	0,0525
2	4	0,0418
3	2	0,0480
4	1,33	0,0391

Tabela 5.2: Erros relativos

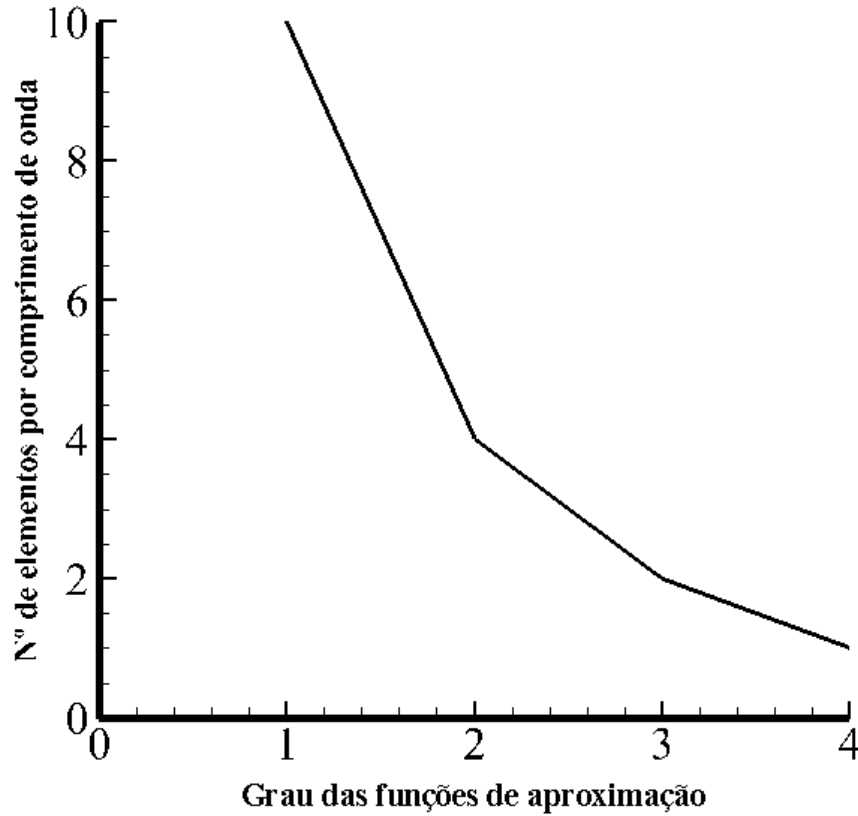


Figura 5.9: Relação entre o número de elementos por comprimento de onda e o grau das funções de aproximação

Como era de esperar, à medida que se aumenta o grau das funções de aproximação, o número de elementos necessários para se atingir o erro de referência é cada vez menor. Com base no gráfico da Figura 5.9, uma regra simples para determinar o número de elementos de grau  $p > 1$  necessários para obter soluções com precisão igual ou superior à obtida com 10 elementos lineares por comprimento de onda seria:

$$N_e = \frac{4}{p-1} \quad (5.21)$$

Mais testes serão, no entanto, precisos para confirmar a validade da estimativa (5.21).

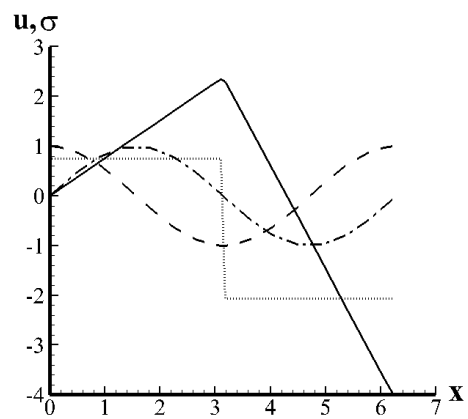
Para se avaliar a convergência da solução obtida utilizando elementos finitos híbridos sob refinamentos  $p$  e  $h$ , o problema descrito na Secção 5.3.1, com  $\omega = 1$ , é resolvido utilizando dois a vinte elementos híbridos construídos com bases monomiais do primeiro, segundo e terceiro graus. Os campos de deslocamentos e tensões obtidos para todas as combinações de refinamentos  $p$  e  $h$  encontram-se representados na Figura 5.10. Cada gráfico tem na abcissa as coordenadas globais ( $x$ ) e na ordenada os deslocamentos e tensões analíticos e aproximados. Além disso, é referido o grau das funções de aproximação  $p$  e o número de elementos  $h$  utilizados. Começando por analisar os

Deslocamento analítico (exato) -----

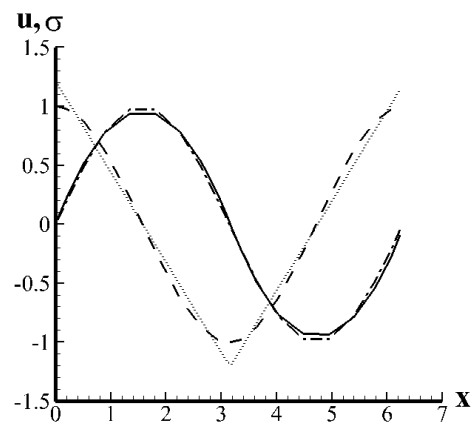
Deslocamento aproximado —————

Tensão analítica (exata) -----

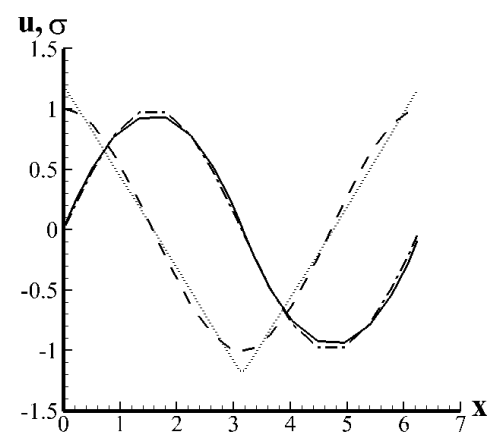
Tensão aproximada .....



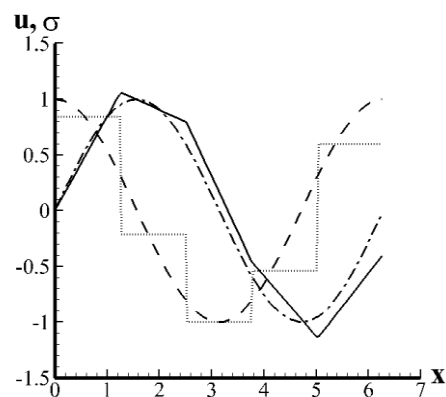
a)  $p=1$ ;  $h=2$



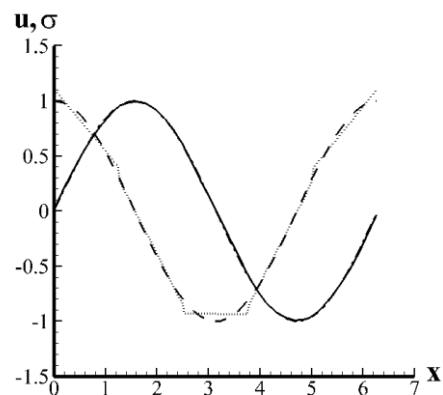
b)  $p=2$ ;  $h=2$



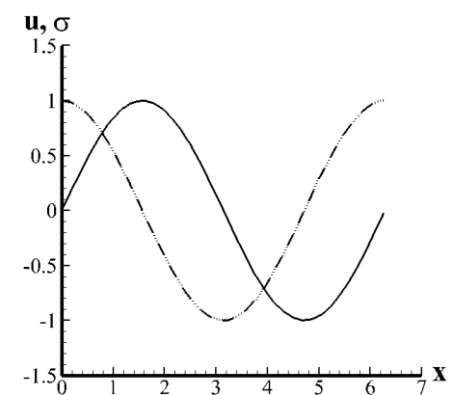
c)  $p=3$ ;  $h=2$



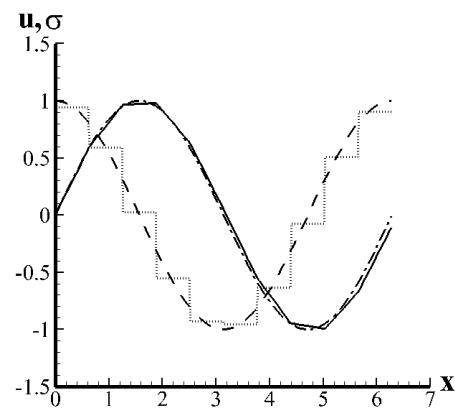
d)  $p=1; h=5$



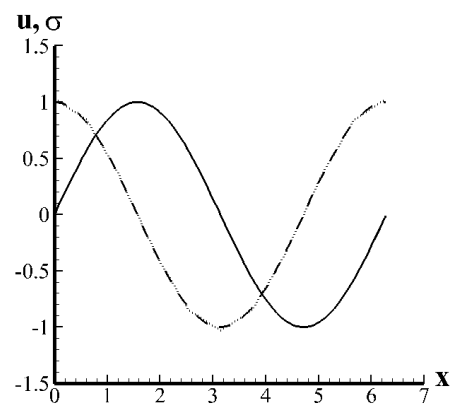
e)  $p=2; h=5$



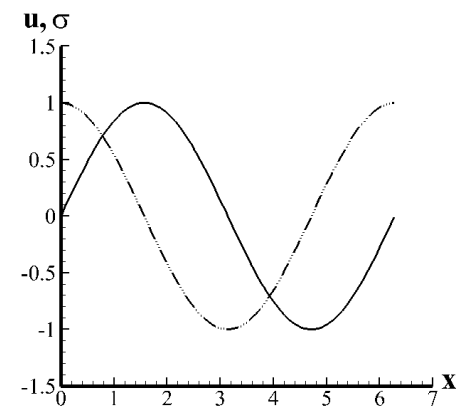
f)  $p=3; h=5$



g)  $p=1; h=10$

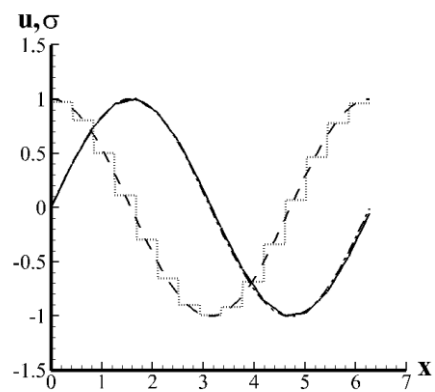


h)  $p=2; h=10$

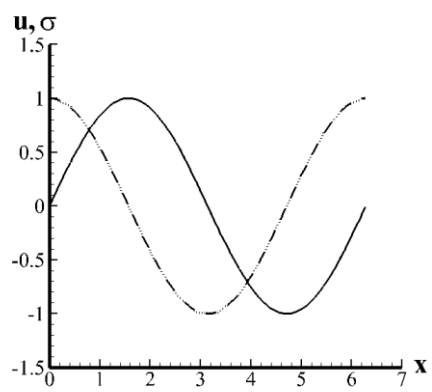


i)  $p=3; h=10$

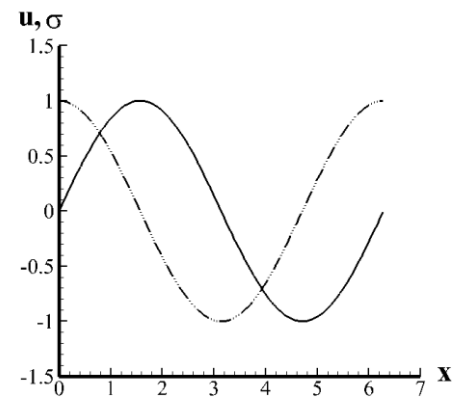




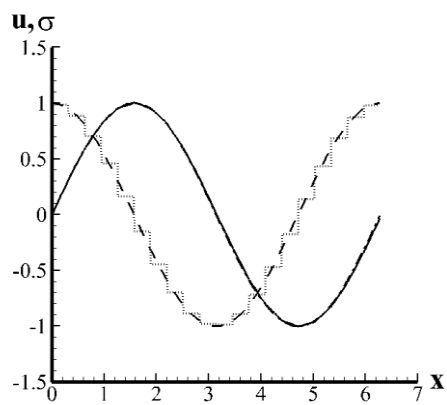
j)  $p=1$ ;  $h=15$



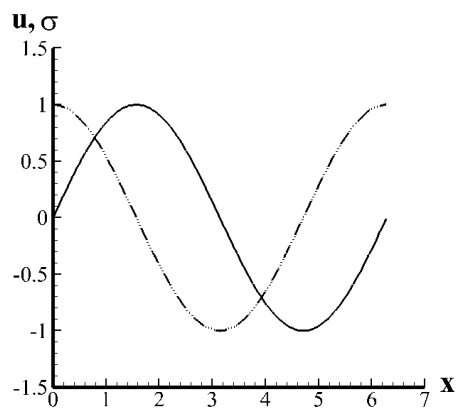
k)  $p=2$ ;  $h=15$



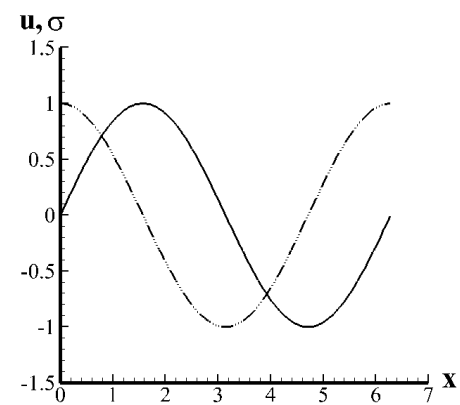
l)  $p=3$ ;  $h=15$



m)  $p=1$ ;  $h=20$



n)  $p=2$ ;  $h=20$



o)  $p=3$ ;  $h=20$

Figura 5.10: Aproximações dos deslocamentos e das tensões utilizando refinamentos  $h$  e  $p$

primeiros gráficos da Figura 5.10, pode-se verificar que há uma discrepância considerável entre as soluções aproximadas e exatas tanto de deslocamentos como de tensões. Por ser um problema simétrico, ou seja, as soluções analíticas de deslocamentos e de tensões são simétricas, era de esperar resultados aproximados simétricos. No entanto, a simetria da solução aproximada depende também da simetria da discretização e das condições de fronteira aplicadas. Neste caso, as condições de fronteira não são simétricas, sendo uma fronteira de Dirichlet e outra de Neumann, o que justifica a falta de simetria nas soluções que estão longe da convergência. No entanto, quando se aumenta o nível de refinamento, todas as soluções aproximadas tornam-se simétricas. Como era de esperar, as soluções são sempre compatíveis, recuperando o deslocamento imposto em  $x = 0$  e a continuidade inter-elementar em deslocamentos. Como já foi visto no problema estático, as soluções aproximadas convergem mais facilmente para as soluções exatas à medida que se aumentam em simultâneo os refinamentos  $p$  e  $h$ , sendo os deslocamentos mais facilmente recuperados do que as tensões.

Na Figura 5.11 apresenta-se o gráfico com os erros relativos das soluções aproximadas de deslocamento, utilizando os refinamentos  $p$  e  $h$  empregues na elaboração dos gráficos da Figura 5.10. Os erros são calculados utilizando a definição (5.4) onde a solução exata é calculada pela equação (5.18). No gráfico, ambos os eixos são logarítmicos, sendo que os valores nas abcissas correspondem ao número de graus de liberdade do sistema ( $N$ ) e os valores nas ordenadas correspondem aos valores dos erros relativos ( $\epsilon$ ). As linhas a tracejado representam a convergência sob refinamento  $p$ , usando o mesmo refinamento  $h$  e as linhas contínuas correspondem a convergência sob refinamento  $h$  utilizando o mesmo refinamento  $p$ . Pode-se observar uma ligeira falta de monotonia na diminuição do erro relativo sob refinamento  $p$  quando se utilizam dois elementos e se aumentam os graus de liberdade. De notar que, à semelhança dos elementos convencionais, a convergência monótona só acontece em termos de energia mecânica, enquanto que no caso em estudo o erro é medido com base em deslocamentos.

Ainda na Figura 5.11 encontram-se os valores das taxas de convergência relativos aos refinamentos  $p$  e  $h$ . Os valores obtidos mostram mais uma vez que a taxa de convergência sob refinamento  $p$  é consideravelmente superior à taxa de convergência sob refinamento  $h$ , mas também que os dois refinamentos potenciam-se um ao outro, do mesmo modo que no caso dos problemas estáticos. A taxa de convergência sob refinamento  $h$  apresenta

mais uma vez valores ( $k_{p=1} = 2,08, k_{p=2} = 2,5, k_{p=3} = 4,22$ ) próximos dos previstos pela equação (5.5) dos elementos finitos convencionais.

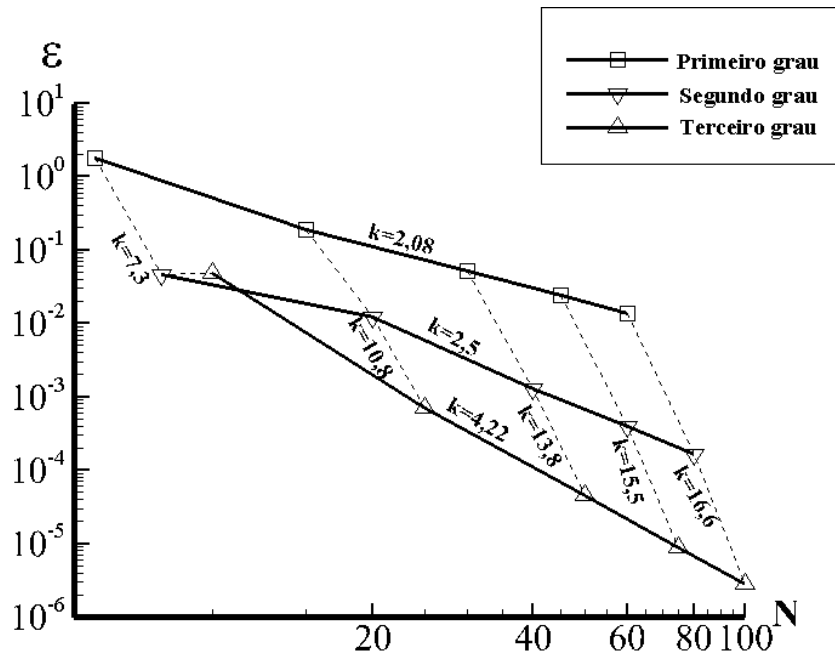


Figura 5.11: Convergência da solução dos deslocamentos sob refinamentos  $p$  e  $h$

## 5.4 Problema transitório

Nesta secção estuda-se o desempenho dos elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz na modelação da resposta transitória da barra sujeita a cargas e condições de fronteira que variam no tempo e no espaço.

Para tal, são estudados dois tipos de problemas. O primeiro problema foi especialmente concebido para simular, controladamente, um problema transitório, não prescindindo, ao mesmo tempo, de ter uma solução analítica. Pelo contrário, a segunda classe de problemas envolve situações genuinamente transitórias, sem solução analítica, simulando a propagação de ondas de choque pela barra. Para as duas situações, analisa-se a qualidade das aproximações dos campos dos deslocamentos e das tensões, comparando-os com as

soluções analíticas (quando existem) ou com os resultados obtidos pelo programa comercial de elementos finitos convencionais SAP2000.

#### 5.4.1 Problema analítico

Nesta secção pretende-se avaliar a qualidade dos resultados obtidos para problemas transitórios com solução analítica, utilizando elementos finitos híbridos (com polinómios de Chebyshev) e híbridos-Trefftz. Para além dos refinamentos de malha de elementos e das bases de aproximação, nos problemas transitórios, um fator adicional que influencia a qualidade das soluções é a dimensão do passo do tempo utilizado para a discretização no tempo. Por isso, estudam-se separadamente os efeitos dos refinamentos ( $h$  e  $p$ ) no espaço e do refinamento do passo de tempo.

As expressões analíticas dos campos de deslocamentos e de tensões do problema analisado são:

$$u(x, t) = \frac{\sinint(a \cdot x)}{a} \cdot e^{-c \cdot t} \quad (5.22)$$

$$\sigma(x, t) = \frac{\sin(a \cdot x)}{a \cdot x} \cdot e^{-c \cdot t} \quad (5.23)$$

onde  $\sinint(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$  é a anti-derivada da função  $\frac{\sin x}{x}$ .

Nas definições (5.22) e (5.23), o parâmetro  $a$  controla o comprimento de onda das vibrações no espaço, sendo que o aumento dos valores de  $a$  leva à diminuição do comprimento de onda da solução. Por outro lado, o parâmetro  $c$  é responsável pelo controlo do decaimento da intensidade da onda no tempo, sendo que valores altos de  $c$  originam um amortecimento da onda mais elevado.

O problema é analisado considerando a barra representada na Figura 5.12. A barra tem um comprimento total  $L = \pi/2$ , uma área da secção transversal  $A$  unitária, está sujeita a uma carga de vão  $f(x, t)$  e tem características do material  $E = \rho = 1$ . A barra possui uma fronteira encastrada em  $x = 0$  ( $u_\Gamma = 0$ ) e uma fronteira livre em  $x = \pi/2$ , onde está aplicada uma força,  $F(t) = \frac{2 \cdot \sin(\frac{a \cdot \pi}{2})}{a \cdot \pi} \cdot e^{-c \cdot t}$ . Inserindo as definições (5.22) e (5.23) na equação governativa (2.4), a força de massa  $b(x, t)$  é definida pela seguinte expressão:

$$b(x, t) = f(x, t) = \left[ -\frac{\cos(a \cdot x)}{x} + \frac{\sin(a \cdot x)}{a \cdot x^2} + \frac{c^2}{a} \cdot \sinint(a \cdot x) \right] \cdot e^{-c \cdot t} \quad (5.24)$$

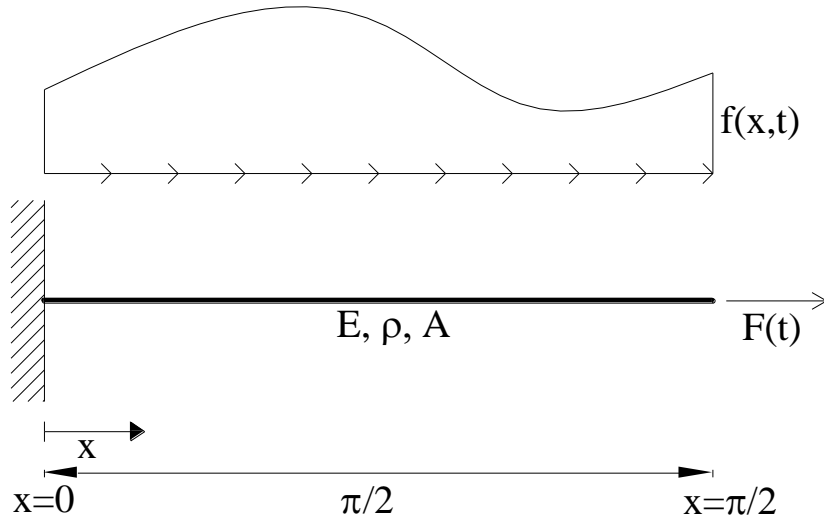


Figura 5.12: Problema analítico

As condições iniciais do problema são dadas respetivamente por:

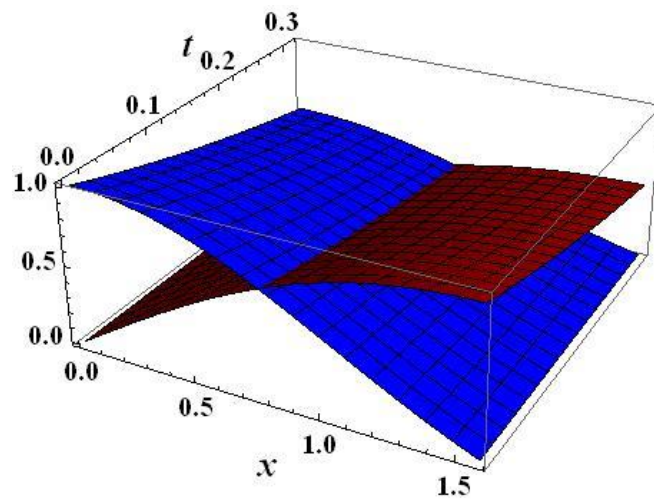
$$u_0(x) = u(x, 0) = \frac{\sinint(a \cdot x)}{x} \quad (5.25)$$

$$v_0(x) = \frac{du(x,0)}{dt} = -\frac{c}{a} \cdot \sinint(a \cdot x) \quad (5.26)$$

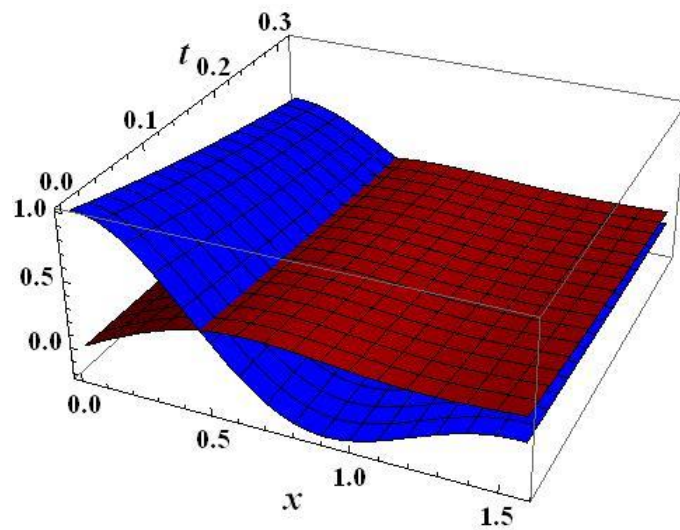
$$a_0(x) = \frac{du^2(x,0)}{dt^2} = \frac{c^2}{a} \cdot \sinint(a \cdot x) \quad (5.27)$$

Para a realização dos testes foram utilizados três valores diferentes para o parâmetro  $a$ , nomeadamente,  $a = \{2, 5, 10\}$ , e o valor  $c = 2$  para o parâmetro  $c$ . Na Figura 5.13 encontram-se representadas as soluções analíticas de deslocamentos e de tensões para as situações testadas.

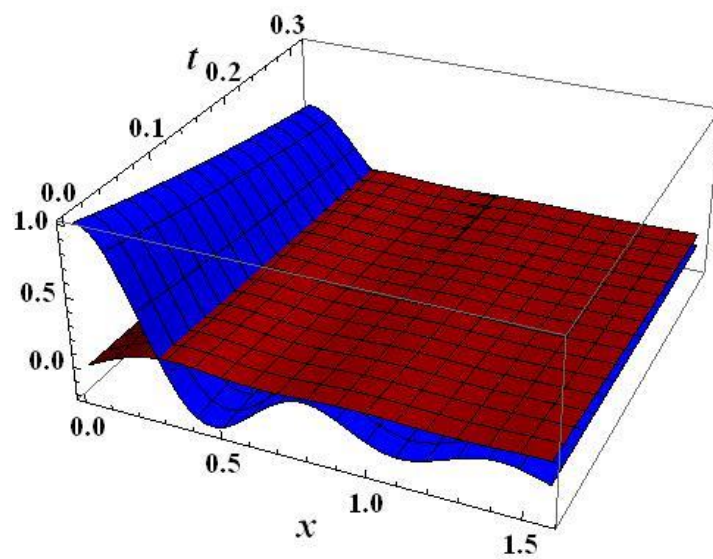
A primeira parte do estudo da convergência consiste na análise do efeito do refinamento no espaço. Para isso, foram efetuadas análises utilizando vários níveis de refinamentos  $p$  e  $h$ . Para se mitigarem os eventuais erros provenientes de um insuficiente refinamento do passo de tempo, o estudo realizou-se utilizando um passo de tempo bastante refinado,  $\Delta t = \pi/200$ , e um tempo total  $t = \pi/10$ . Para as três situações testadas ( $a = \{2, 5, 10\}$ ), foram elaborados gráficos das variações dos erros relativos das soluções aproximadas de deslocamentos sob refinamentos  $p$  e  $h$  (Figuras 5.14 a 5.16). Os valores dos erros foram calculados no final do intervalo de tempo utilizando a definição (5.4), enquanto que a solução exata foi calculada pela equação (5.22).



a)  $a=2; c=2$



b)  $a=5; c=2$



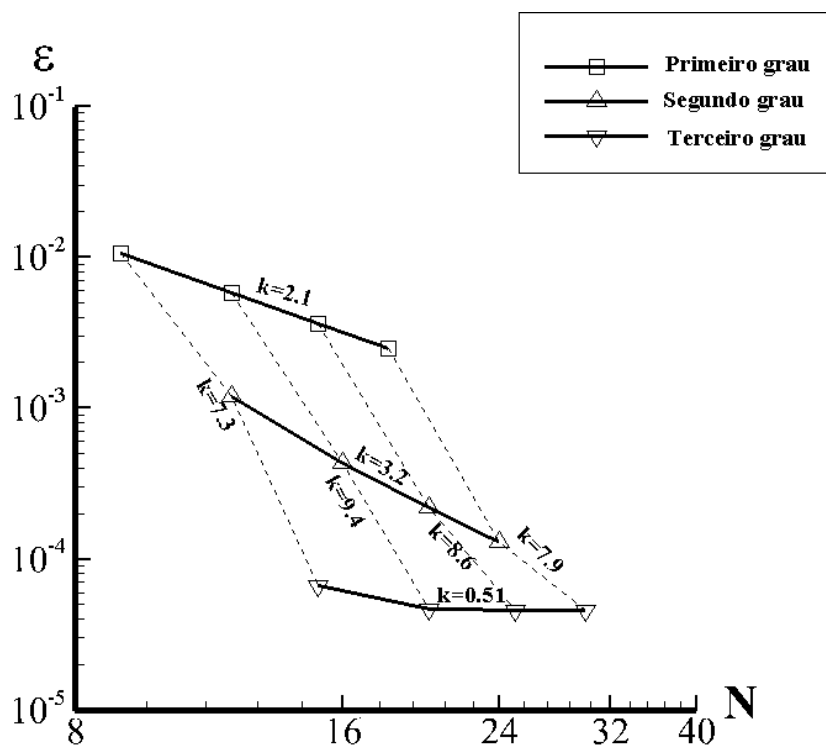
c)  $a=10; c=2$

Figura 5.13: Soluções analíticas de deslocamentos (vermelho) e de tensões (azul)

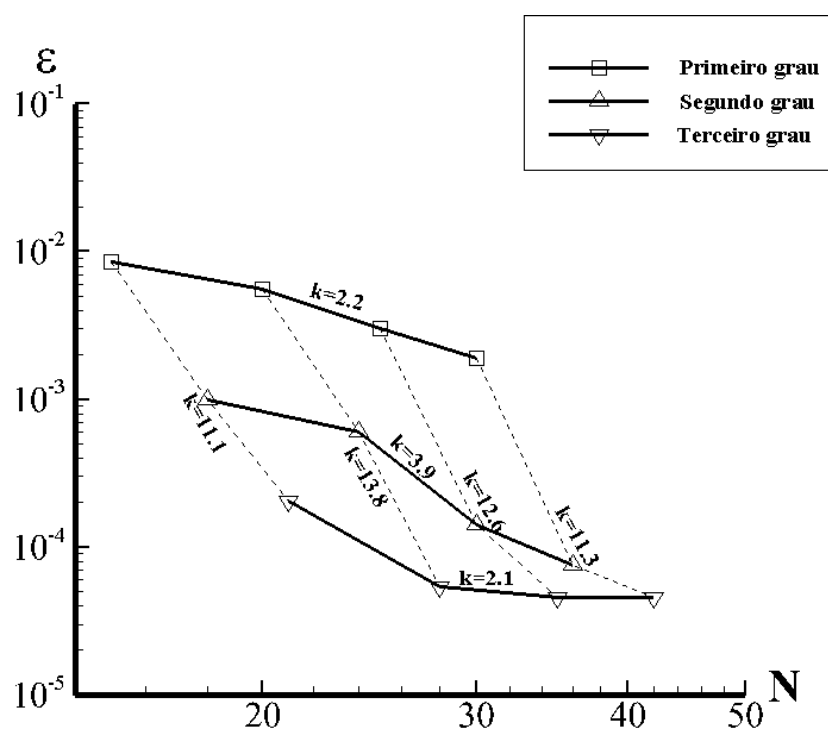
Em todos os gráficos de convergência, ambos os eixos são logarítmicos, sendo que os valores nas abcissas correspondem ao número de graus de liberdade do sistema e os valores nas ordenadas correspondem aos valores dos erros relativos. Como nos gráficos apresentados anteriormente, as linhas a tracejado representam a convergência sob refinamento p e as linhas contínuas correspondem à convergência sob refinamento h. Para todos os testes, foram utilizadas quatro malhas, nomeadamente de três, quatro, cinco e seis elementos. No entanto, os graus p das bases de aproximação diferem entre os testes, conforme explicado de seguida.

Na Figura 5.14 estão representados os gráficos de convergência recorrendo a elementos híbridos com polinómios de Chebyshev e híbridos-Trefftz para  $a = 2$ . Devido ao baixo grau de dificuldade numérica deste problema, caracterizado por uma solução estável no espaço (ver Figura 5.13 a)), as bases de aproximação foram construídas utilizando apenas funções de aproximação do primeiro ao terceiro grau. Testes numéricos com bases mais refinados revelaram que os pesos associados às funções de grau superior são praticamente desprezáveis, principalmente quando a dimensão do elemento se torna muito reduzida à medida que o refinamento h é aumentado. Por sua vez, nas Figuras 5.15 e 5.16 estão representados os gráficos de convergência para os parâmetros  $a = 5$  e  $a = 10$ , respetivamente. As bases de aproximação utilizadas para os dois testes incluíram polinómios do primeiro ao quarto grau, devido à natureza oscilatória das respetivas soluções analíticas (ver Figuras 5.13 b) e c)).

Observando os gráficos de convergência de cada uma das três situações, pode-se verificar que, para todos os testes, as soluções convergem para erros inferiores a 0,01 %. Nas mesmas figuras, encontram-se quantificadas as taxas de convergência sob os refinamentos p e h. Como se pode observar, os valores das taxas de convergência obtidos utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz, tanto para refinamento p como para refinamento h, são maiores do que os valores obtidos pelos elementos finitos híbridos, confirmando que empregando elementos finitos híbridos-Trefftz as soluções obtidas tendem mais facilmente para a solução exata. Essa melhoria parece ser mais importante no refinamento p do que no refinamento h e nas soluções mais oscilatórias ( $a = 10$ , Figura 5.16) do que nas situações com  $a = 2$  e  $a = 5$  (Figuras 5.14 e 5.15). De notar, no entanto, que a melhoria da convergência vem a custo de dois graus de liberdade adicionais



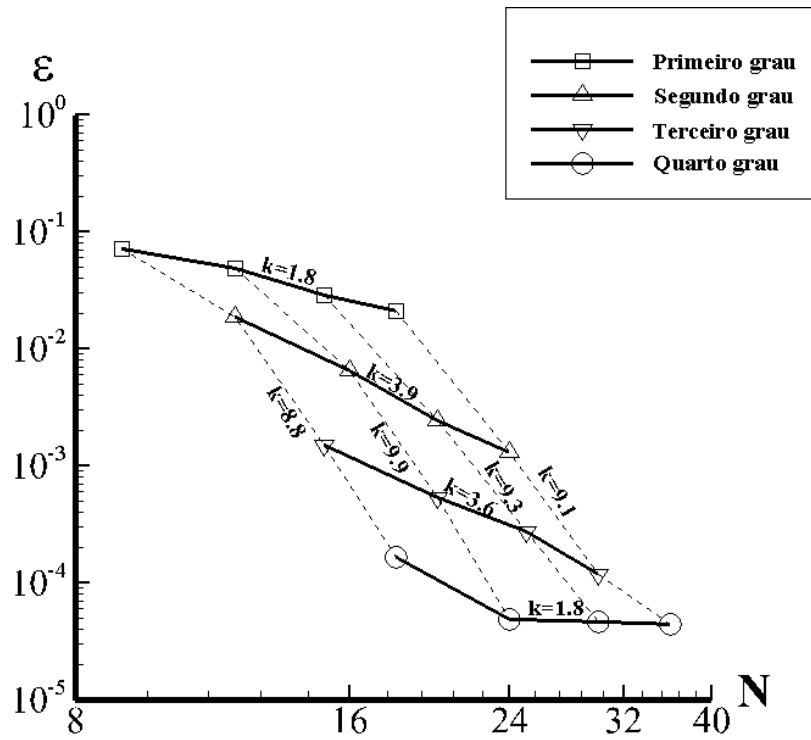
a) Elementos finitos híbridos



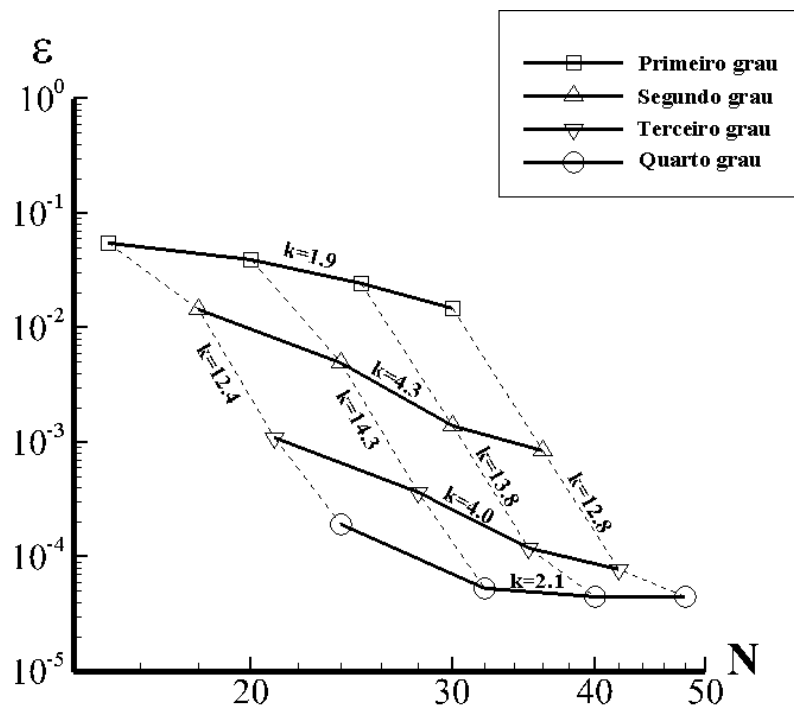
b) Elementos finitos híbridos-Trefftz

Figura 5.14: Convergência da solução dos deslocamentos sob refinamentos  $p$  e  $h$  para  $a=2$



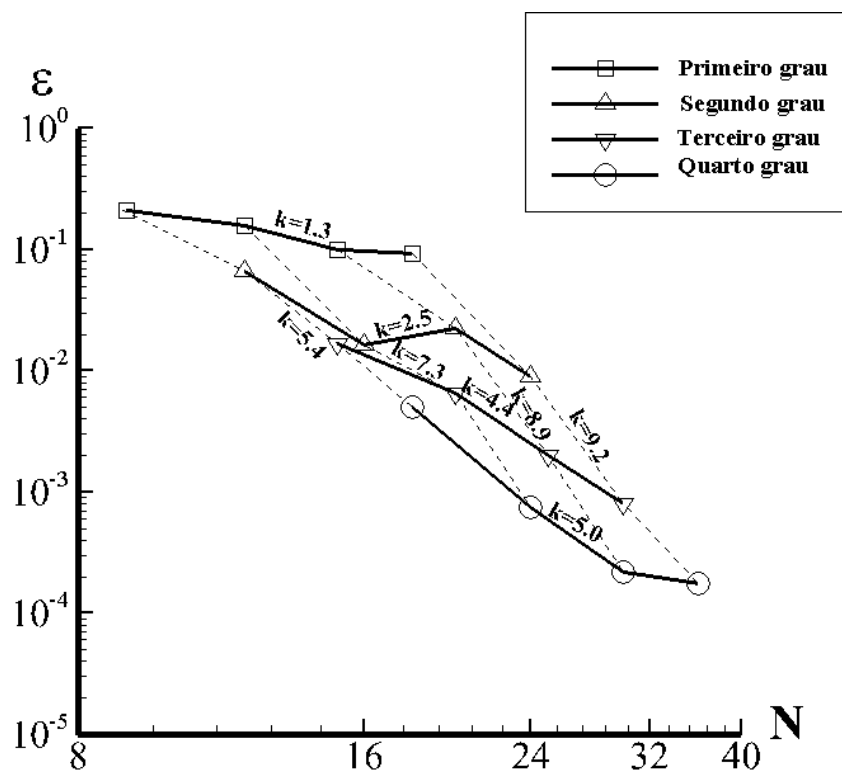


a) Elementos finitos híbridos

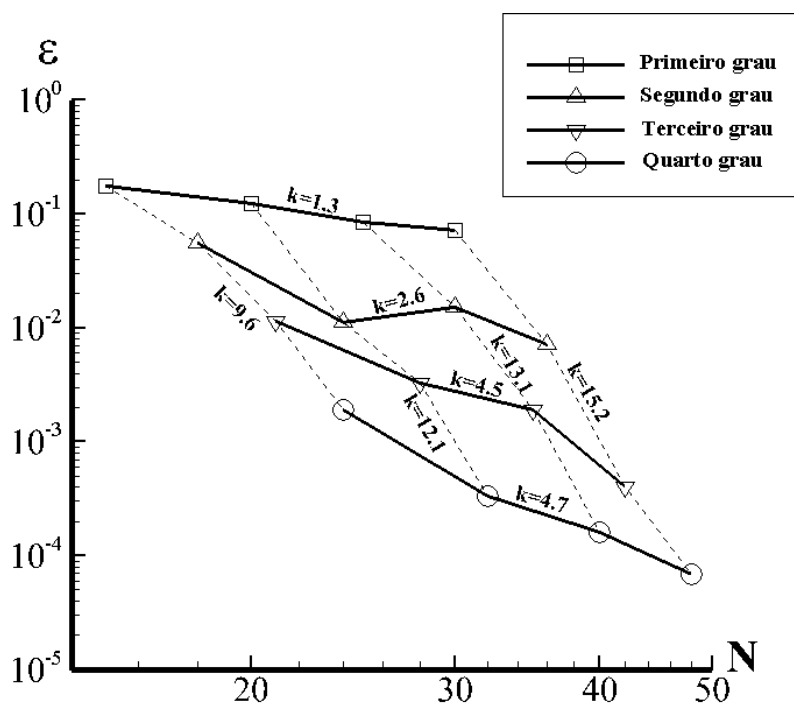


b) Elementos finitos híbridos-Trefftz

Figura 5.15: Convergência da solução dos deslocamentos sob refinamentos p e h para  $a=5$



a) Elementos finitos híbridos



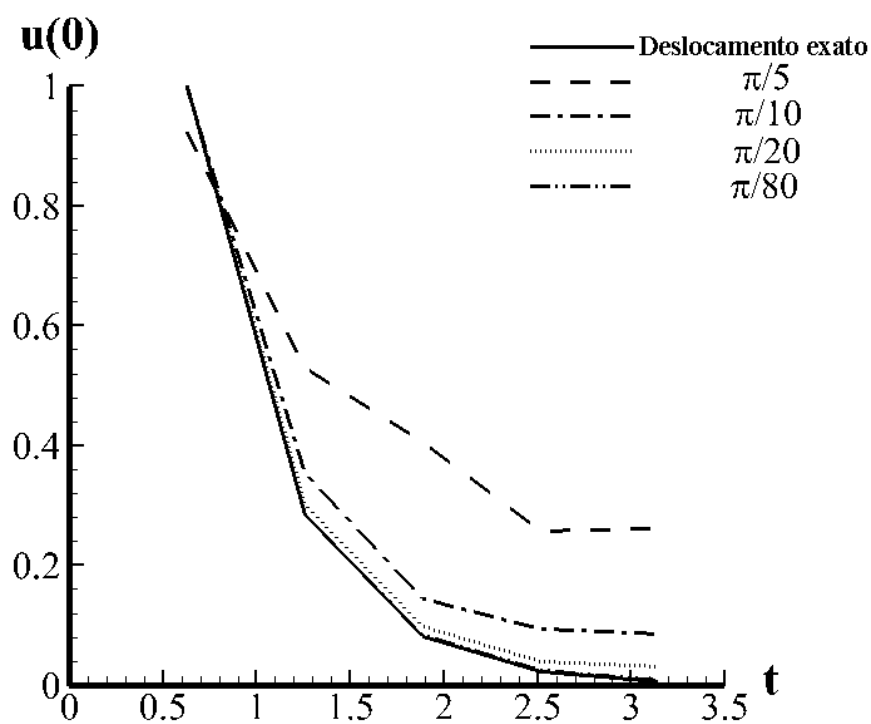
b) Elementos finitos híbridos-Trefftz

Figura 5.16: Convergência da solução de deslocamentos sob refinamentos  $p$  e  $h$  para  $a=10$

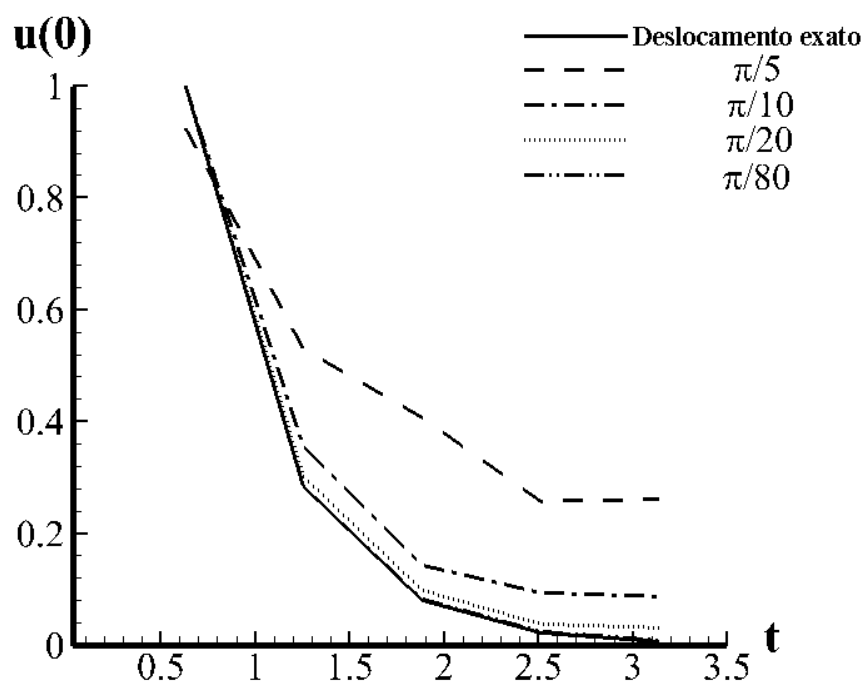
por elemento, pelo que a opção de utilizar elementos finitos híbridos-Trefftz em vez de híbridos nem sempre será justificada. Nas três situações testadas, pode-se observar também que as taxas de convergência sob refinamento  $p$  são superiores à taxa de convergência sob refinamento  $h$ , principalmente para os elementos finitos híbridos-Trefftz. Conclui-se, assim, que quando o problema a resolver espera-se ser numericamente mais difícil, é mais vantajoso utilizar elementos finitos híbridos-Trefftz e recorrer ao refinamento  $p$  da solução.

A segunda parte do estudo da convergência consta na avaliação da convergência sob refinamento no tempo, isto é, na avaliação da influência do passo de tempo  $\Delta t$  na qualidade da solução. Para se evitar a poluição das soluções com erros significativos causados pelo refinamento no espaço, a discretização no espaço é feita utilizando cinco elementos do quarto grau e 10 pontos de Gauss por elemento. Os parâmetros considerados para a definição do problema são  $a = 5$  e  $c = 2$ . O tempo total da análise,  $t = \pi$ , é dividido em passos de tempo de dimensão  $\Delta t = \left\{ \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{80} \right\}$ . Os valores dos deslocamentos e das tensões em  $x = 0,004099$ , aproximados por elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz, foram retirados nos instantes de tempo  $t = \left\{ \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi \right\}$  e comparados com os respectivos valores exatos dados pelas definições (5.22) e (5.23). As Figuras 5.17 e 5.18 apresentam as variações no tempo das soluções aproximadas e exatas, normalizados ao valor da solução exata em  $t = \frac{\pi}{5}$ .

Pode-se afirmar que à medida que se reduz o passo de tempo, as soluções dos deslocamentos e das tensões aproximam-se mais dos respectivos valores exatos. Quando o passo de tempo é excessivo, a discrepância entre as soluções aproximada e exata tende a aumentar de um passo de tempo para outro, tornando-se especialmente relevante na segunda parte do intervalo analisado ( $t > \frac{\pi}{2}$ ). No entanto, a solução exata é recuperada em toda a extensão de tempo quando  $\Delta t = \pi/80$ . É importante mencionar que foram ainda realizados testes com passos de tempo inferiores a  $\pi/80$ , tendo-se chegado à conclusão que as soluções eram praticamente idênticas as obtidas com  $\Delta t = \pi/80$ . Devido ao alto nível de refinamento no espaço, não foram observadas diferenças entre os resultados obtidos com os dois tipos de elementos finitos.

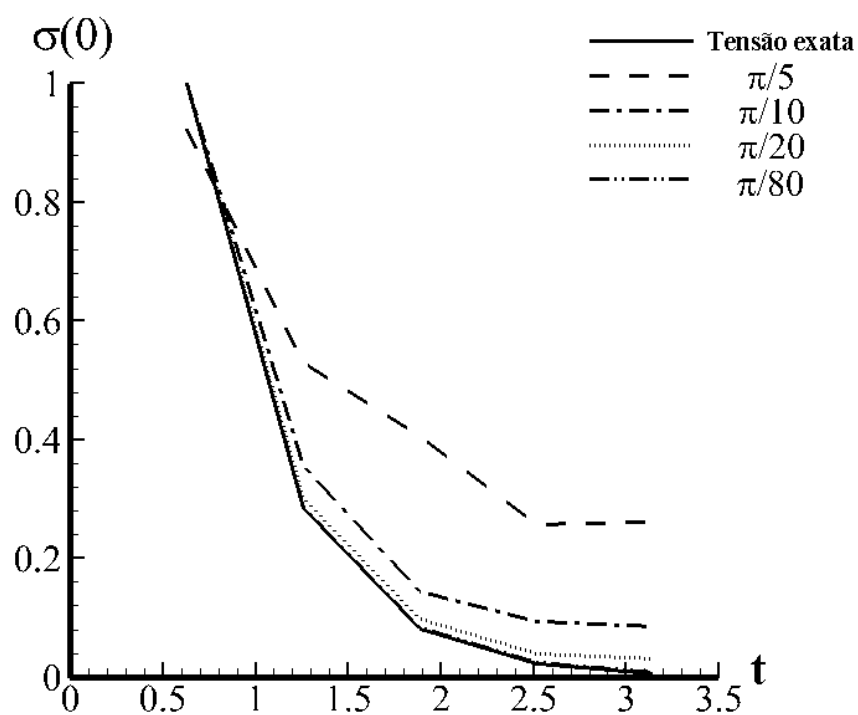


a) Elementos finitos híbridos

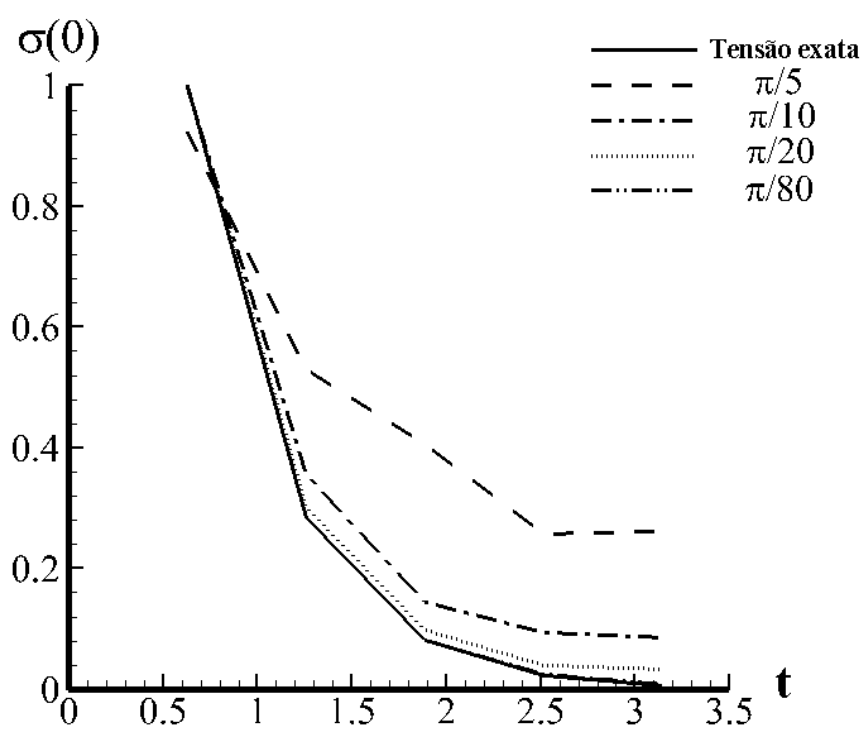


b) Elementos finitos híbridos-Trefftz

Figura 5.17: Evolução no tempo dos deslocamentos em  $x=0$



a) Elementos finitos híbridos



b) Elementos finitos híbridos-Trefftz

Figura 5.18: Evolução no tempo das tensões em  $x=0$

### 5.4.2 Propagação de ondas de choque

Os problemas envolvendo a propagação de ondas de choque através de elementos estruturais são muito exigentes do ponto de vista numérico. A presença de ações repentinas e de curta duração inviabiliza, praticamente, a utilização de técnicas de integração no tempo baseadas em transformadas contínuas (por exemplo Fourier), enquanto que a modelação de soluções com altos gradientes, concentrados numa zona restrita da estrutura (isto é, a onda de choque) coloca dificuldades consideráveis à discretização no espaço.

Dois problemas deste tipo serão analisados considerando a barra representada na Figura 5.19. A barra tem comprimento total  $L = 1$ , tem uma área unitária da secção transversal  $A$  e tem características do material  $E = \rho = 1$ . A barra possui uma fronteira encastrada em  $x = 0$  ( $u_{\Gamma} = 0$ ) e uma fronteira livre em  $x = 1$ , onde é aplicada uma força,  $F(t)$ . Dois casos de carregamento são definidos, com a variação no tempo representada na Figura 5.20. Nos dois casos, a solicitação é aplicada repentinamente, sendo nulas as condições iniciais em toda a barra,  $u_0(x) = v_0(x) = a_0(x) = 0$ .

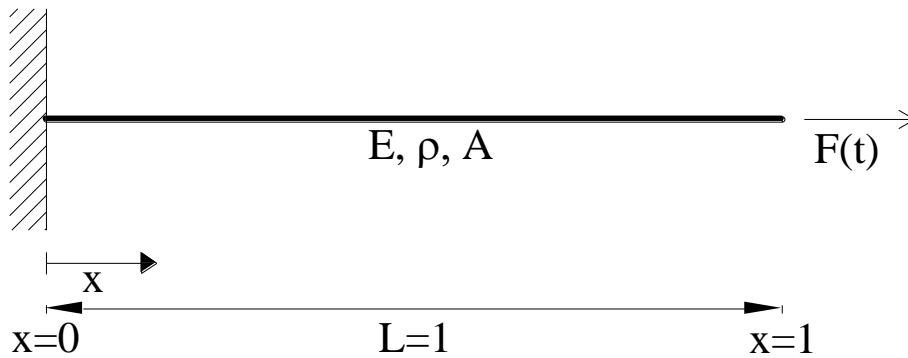


Figura 5.19: Problema de choque

Após um curto intervalo de atuação, a força é removida gradualmente (caso 1) ou repentinamente (caso 2). Espera-se, por consequência, que os modelos tenham mais dificuldade em recuperar a solução do caso 2, por causa das discontinuidades  $C^0$  presentes no campo das tensões.

Para a modelação dos dois problemas foram utilizados os elementos finitos convencionais disponíveis no programa comercial SAP2000 e elementos finitos híbridos-

Trefftz. Note-se que os elementos de barra disponíveis no programa SAP2000 utilizam funções de aproximação cúbicas para a modelação do campo dos deslocamentos.

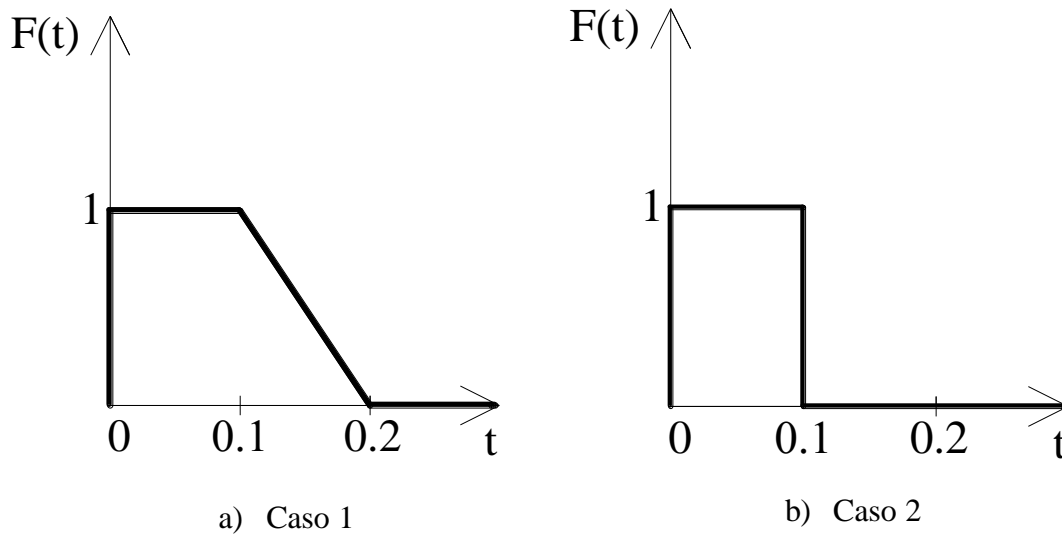
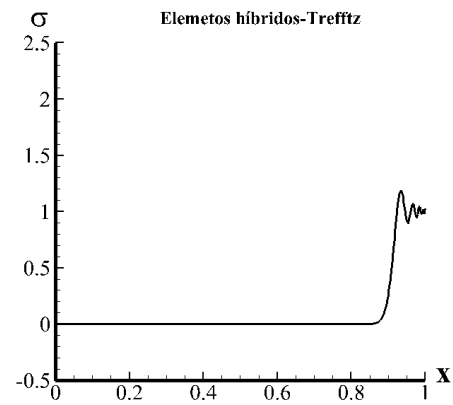
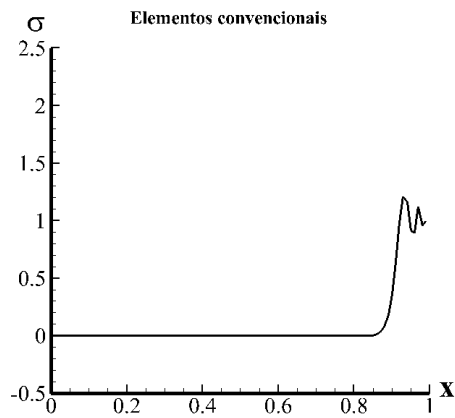


Figura 5.20: Casos de carregamento no problema de choque

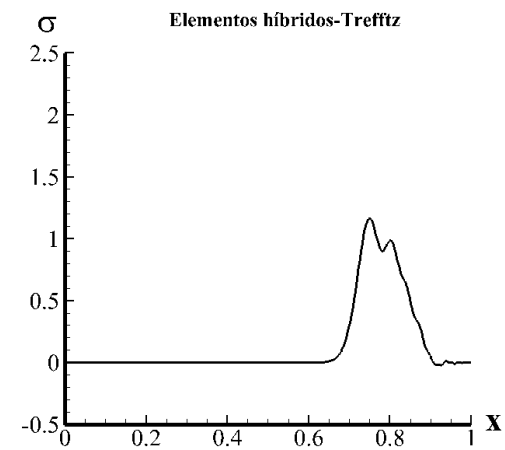
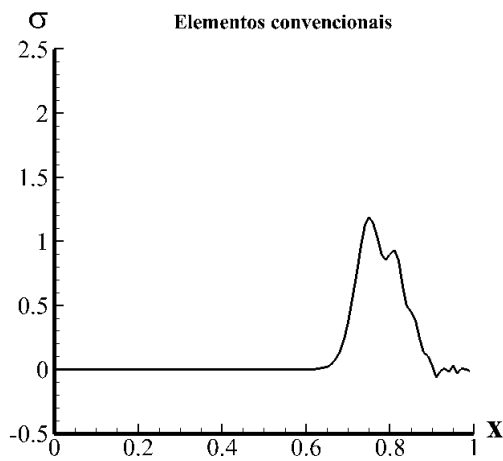
Todos os problemas foram discretizados no tempo utilizando o método de Newmark. Um ligeiro amortecimento numérico foi inserido no algoritmo de integração para controlar as oscilações espúrias causadas pelas discontinuidades na aplicação da força, através da escolha do coeficiente  $\gamma = 0.55$ . Para o algoritmo de integração preservar as suas propriedades de estabilidade incondicional, o parâmetro  $\beta$  foi calculado pela expressão (3.15). A aplicação do amortecimento numérico não afeta significativamente a amplitude da onda mas diminui as vibrações espúrias, apresentando resultados com melhor qualidade. Todas as análises utilizam um passo de tempo  $\Delta t = 0.01$  segundos e uma duração total  $t = 1.5$  segundos.

Relativamente à discretização no espaço, o comprimento total da barra foi dividido em 50 elementos. Polinómios do quarto grau foram utilizados em todos os elementos híbridos-Trefftz, para todas as análises.

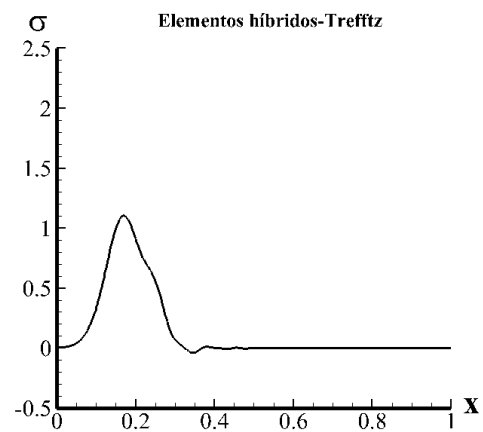
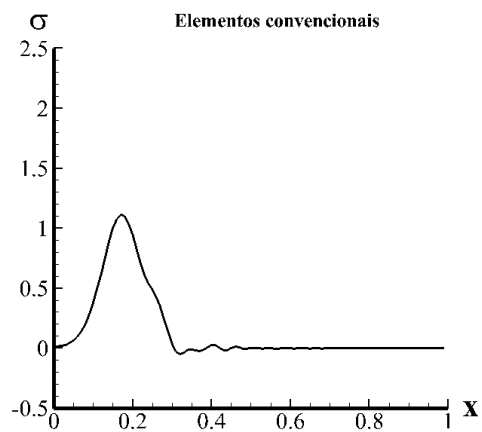
Nas Figuras 5.21 e 5.22 estão representados os campos de tensão na barra para o caso 1 e caso 2 de carregamento, respetivamente. Apenas são apresentados os resultados em alguns instantes considerados mais relevantes para a avaliação do desempenho numérico, tanto para elementos finitos convencionais (à esquerda) como para elementos finitos



a)  $t = 0.1$

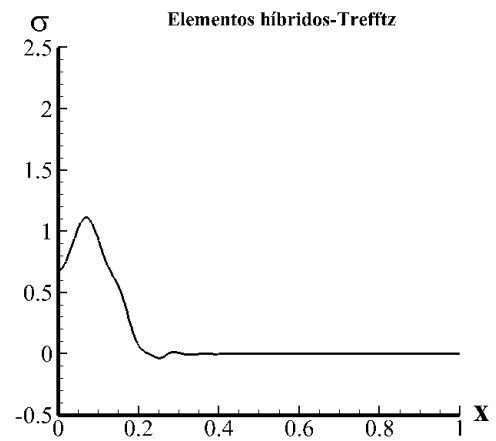
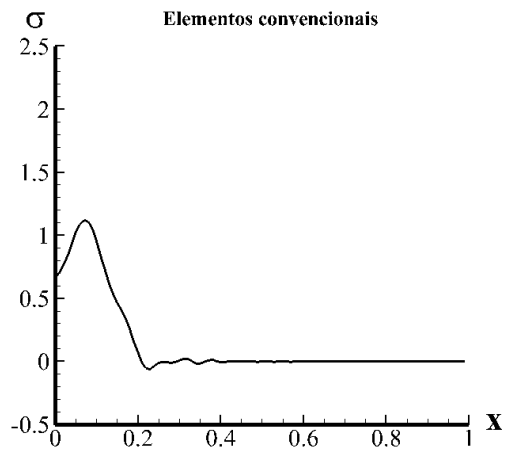


b)  $t = 0.3$

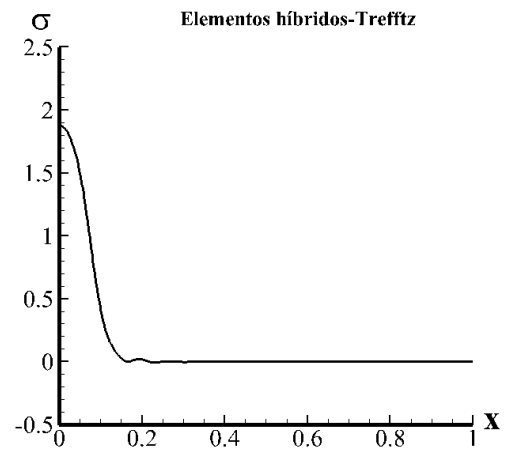
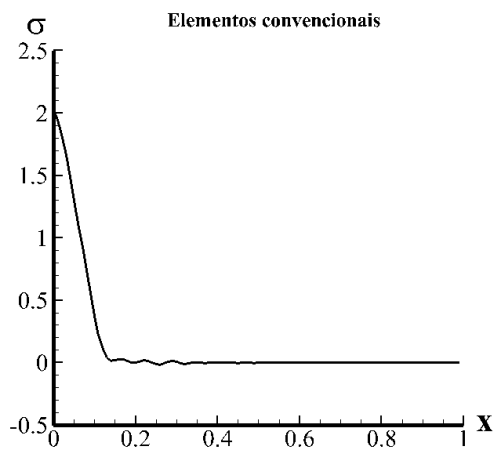


c)  $t = 0.9$

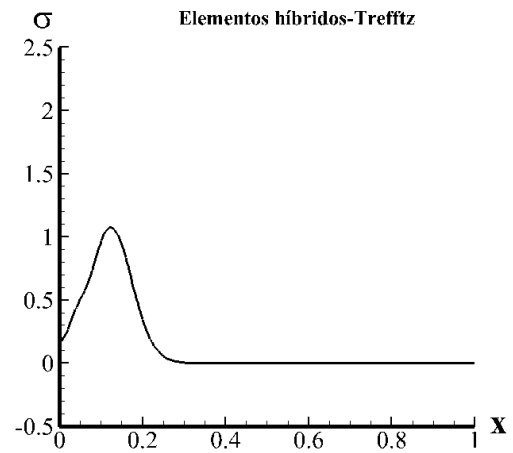
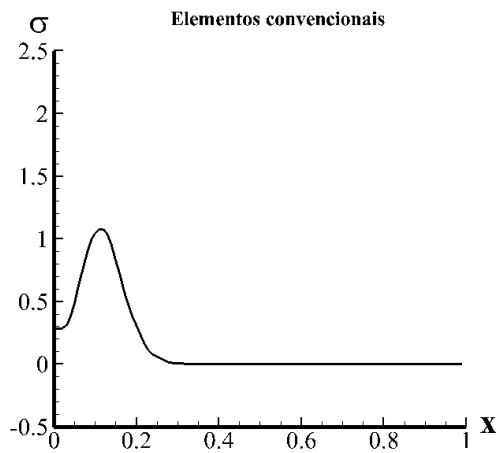




d)  $t = 1.0$



e)  $t = 1.1$



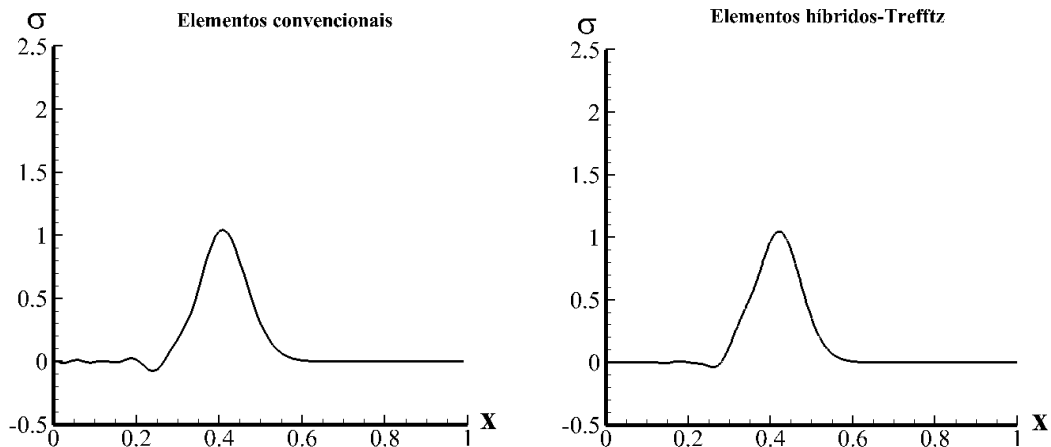
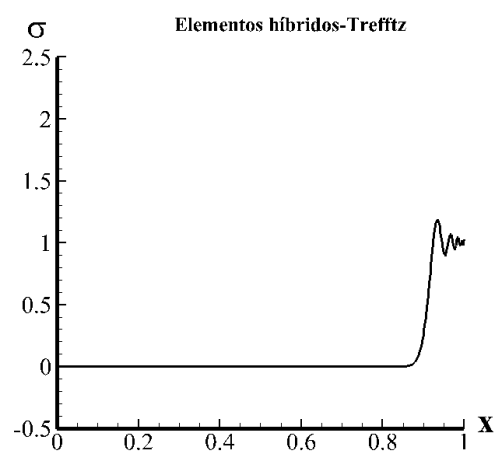
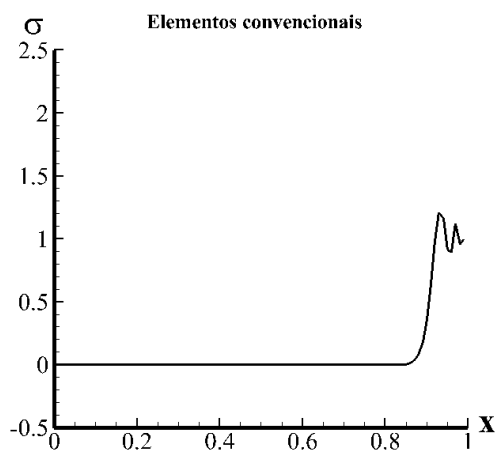
f)  $t = 1.2$ g)  $t = 1.5$ 

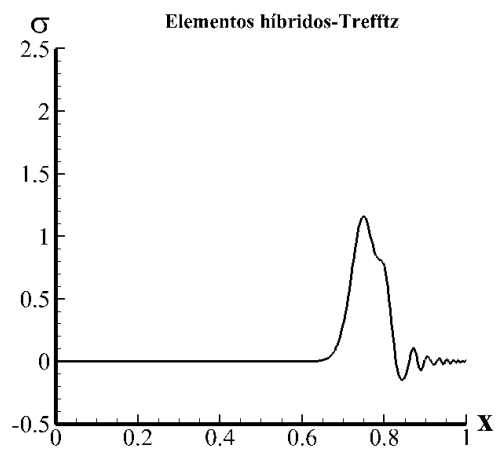
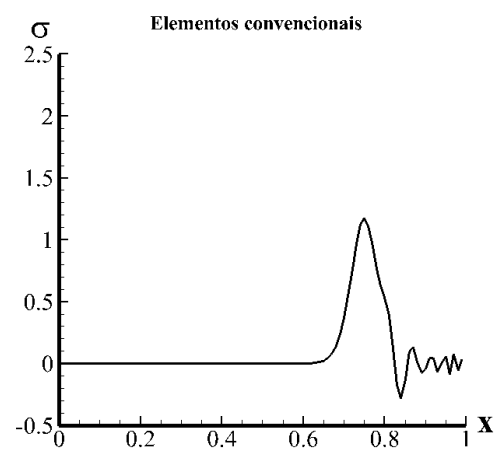
Figura 5.21: Campos de tensões para o caso 1 de carregamento

híbridos-Trefftz (à direita). Em ambas as figuras pode-se observar que a solução corresponde às expectativas. A onda de choque é claramente visível e propaga-se do ponto da aplicação da força em direção ao encastramento. Ao chegar ao encastramento, a onda duplica a sua amplitude e reflete-se em direção à zona de onde a mesma é oriunda. Faz-se notar também que não existem descontinuidades visíveis entre os elementos, o que demonstra que o refinamento utilizado foi suficiente. Na vizinhança da frente da onda, observam-se oscilações espúrias em todos os campos de tensões representados, sendo estas mais visíveis no caso 2 de carregamento, conforme esperado. No entanto, estas oscilações tendem a dissipar-se no tempo nos dois casos.

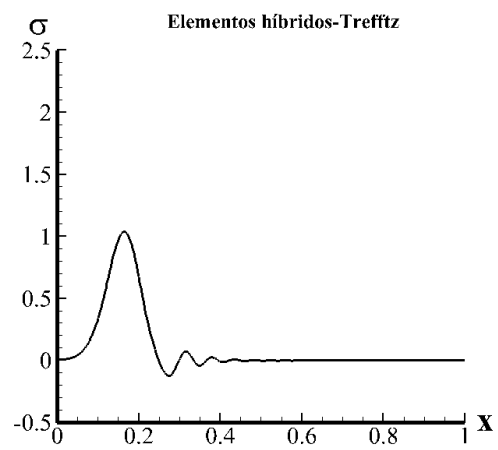
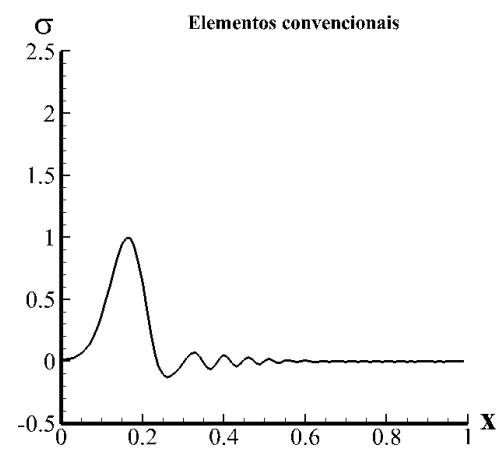
Comparando os resultados fornecidos pelos elementos finitos convencionais e os elementos híbridos-Trefftz, verifica-se que estes são coerentes. Observa-se, contudo, que os resultados utilizando elementos finitos convencionais apresentam mais oscilações espúrias do que os resultados com elementos finitos híbridos-Trefftz, apesar de ter sido introduzido o mesmo amortecimento numérico nos dois modelos. Assim, pelos resultados obtidos, conclui-se que os elementos finitos híbridos-Trefftz aqui utilizados fornecem melhores soluções do que os elementos finitos convencionais implementados no programa comercial SAP2000.



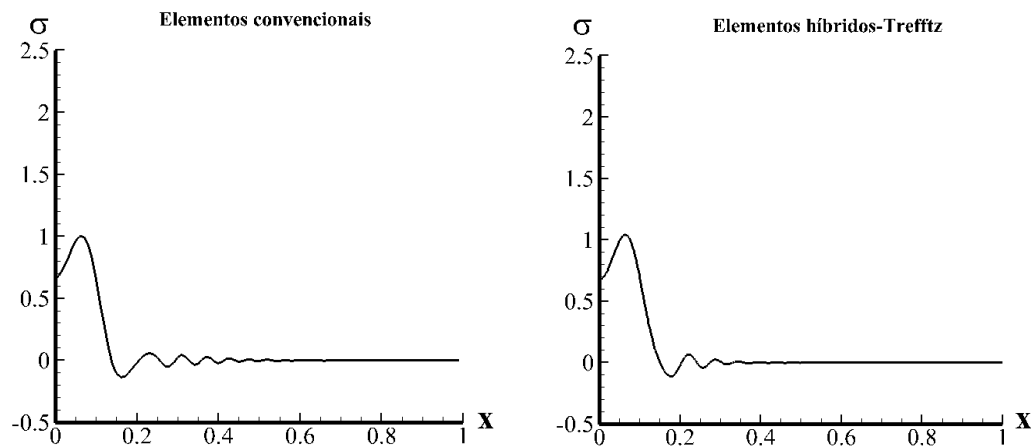
a)  $t = 0.1$



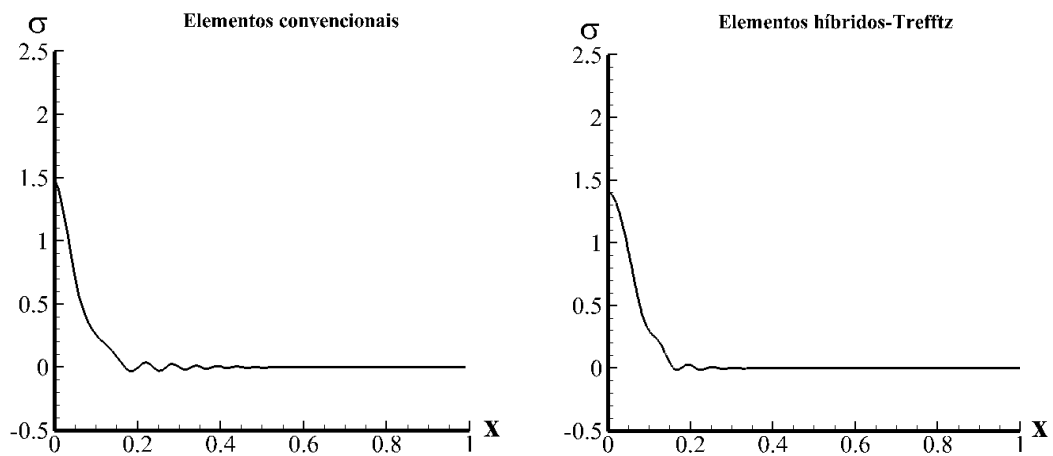
b)  $t = 0.3$



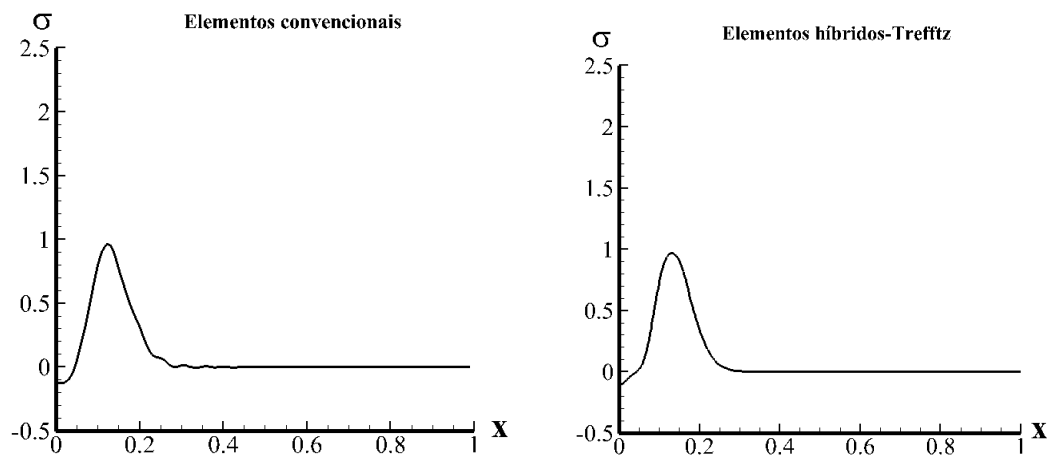
c)  $t = 0.9$



d)  $t = 1.0$



e)  $t = 1.1$



f)  $t = 1.2$

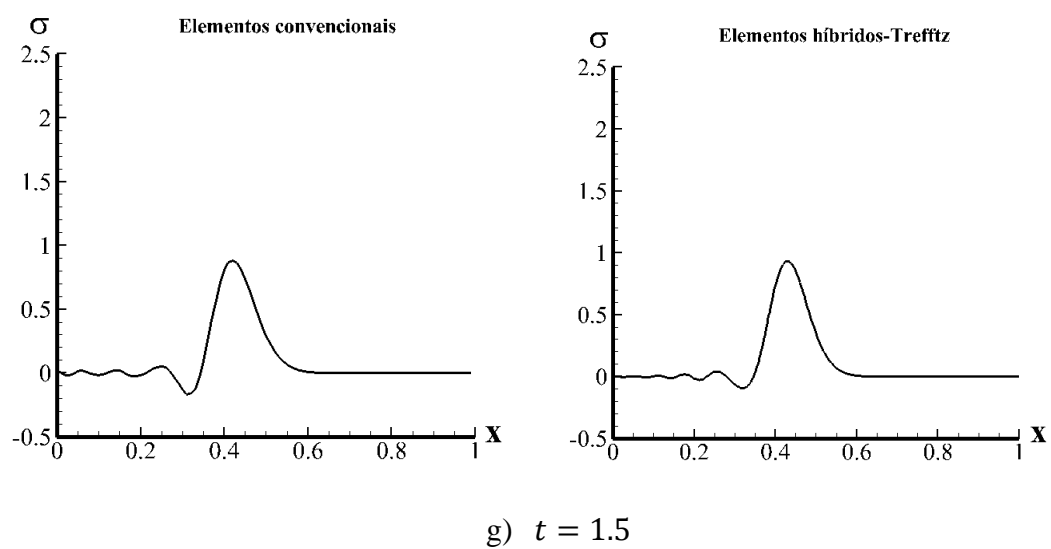


Figura 5.22: Campos de tensões para o caso 2 de carregamento



# Capítulo 6

## Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 6.1 Conclusões

No presente trabalho foram desenvolvidas formulações de elementos finitos não convencionais, nomeadamente, híbridos e híbridos-Trefftz, para barras com comportamento elástico-linear solicitadas por cargas transitórias. Foi também apresentada a formulação do elemento finito convencional para servir de comparação com os elementos finitos não convencionais.

Baseados no método de Rayleigh-Ritz, os elementos finitos convencionais constroem as bases de aproximação no domínio dos elementos utilizando funções escolhidas de maneira a respeitar implicitamente todas as condições de compatibilidade, tanto no domínio, como nas fronteiras de Dirichlet e interiores. Pelo contrário, os elementos híbridos conferem mais flexibilidade à escolha das funções de aproximação, mas as condições de compatibilidade devem ser impostas explicitamente. Finalmente, os elementos híbridos-Trefftz preservam a base dos elementos híbridos e usam-na para recuperar a solução particular da equação diferencial, sendo que para a recuperação da solução complementar são acrescentadas à base duas funções que satisfazem localmente a forma homogénea da equação governativa.

Foi criada uma plataforma computacional em ambiente Matlab, que serve para a análise de problemas unidimensionais estáticos e dinâmicos definidos em barras sujeitas a cargas e condições de fronteira arbitrárias, utilizando as duas classes de elementos finitos não convencionais mencionadas.

Para avaliar o desempenho dos elementos finitos implementados, foram resolvidos problemas estáticos com cargas arbitrárias, utilizando elementos finitos híbridos, e problemas harmónicos e transitórios, utilizando elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz. Um dos focos principais deste trabalho foi a avaliação da eficiência relativa dos

refinamentos  $p$  e  $h$ , tendo em conta a melhoria que provocam nas soluções, através da quantificação das taxas de convergência. Verificou-se que a utilização simultânea dos dois refinamentos conduz a soluções mais próximas das soluções corretas. Observou-se que as taxas de convergência sob refinamento  $p$  são superiores às taxas de convergência sob refinamento  $h$ , mas também que os dois refinamentos potenciam-se um ao outro. Através dos testes realizados, verificou-se que o uso do refinamento  $p$  permite que se considere um número bastante inferior de graus de liberdade do que o necessário para se atingir a mesma qualidade de soluções utilizando o refinamento  $h$ . Por consequência, chegou-se à conclusão que o refinamento  $p$  é o refinamento mais eficiente nos elementos finitos híbridos e híbridos-Trefftz pois conduz a taxas de convergência elevadas e não implica a necessidade de redefinição do elemento, como acontece no caso dos elementos finitos convencionais.

Comparando os elementos não convencionais implementados, observou-se que a informação fisicamente relevante contida na base dos elementos híbridos-Trefftz conduz ao melhor desempenho destes elementos, principalmente em problemas numericamente difíceis (por exemplo problemas altamente oscilatórios). Por consequência, para este tipo de problemas, o número de graus de liberdade necessário para se atingir a mesma qualidade de solução é significativamente menor recorrendo a elementos finitos híbridos-Trefftz do que utilizando elementos híbridos.

Relativamente aos campos aproximados, verificou-se que os campos dos deslocamentos convergem mais facilmente para a solução exata do que os campos das tensões, que necessitam de mais refinamento para atingir o mesmo grau de precisão.

Comparando as soluções dos elementos convencional e híbrido verificou-se que a qualidade das soluções nos dois tipos de elementos finitos é igual para o mesmo grau de refinamento  $p$ . No entanto, os elementos híbridos apresentam a vantagem de permitir refinamento das bases sem necessidade de redefinição do elemento e ainda refinamento  $p$  localizado.

## 6.2 Desenvolvimentos futuros

Como foi mencionado anteriormente, o Capítulo 4 serve de manual de utilização para investigadores que pretendam utilizar a plataforma computacional desenvolvida como



base para expandir os algoritmos existentes ou integrar os seus próprios algoritmos. Assim, na sequência do presente trabalho, sugerem-se algumas propostas para desenvolvimentos futuros:

- Inserção das formulações de elementos finitos híbridos-mistos para comparação com os outros tipos de elementos não convencionais;
- Extensão das formulações a problemas envolvendo barras com comportamento elasto-plástico;
- Adaptação das formulações não convencionais para a análise de problemas bidimensionais ou tridimensionais.



# Referências bibliográficas

- [1] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1996.
- [2] J. Freitas, J. Almeida e E. Pereira, "Non-conventional formulations for the finite element method," *Computational Mechanics*, vol. 23, nº 5-6, pp. 488-501, 1999.
- [3] J. Freitas, "Duality and symmetry in mixed integral methods of elastostatics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, nº 5, pp. 1161-1179, 1989.
- [4] J. Freitas, "Hybrid finite element formulation for elastodynamic analysis in frequency domain," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 36, nº 13, pp. 1883-1923, 1999.
- [5] J. Almeida, "Modelos de elementos finitos para análise elastoplástica," em *Ph.D. thesis*, Technical University of Lisbon, 1989.
- [6] J. Freitas, J. Almeida e E. Pereira, "Alternative hybrid formulations for finite element method," em *FEM - Today and the future*, J. Robinson, Ed., 1993, pp. 264-270.
- [7] B. Veubeke, "Displacement and equilibrium models in the finite element method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52, nº 13, pp. 287-342, 2001.
- [8] T. Pian e P. Tong, "Basics of finite element method for solid continua," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 1, nº 1, pp. 3-28, 1969.
- [9] J. Jirousek, "Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 14, nº 1, pp. 65-92, 1978.
- [10] F. Brezzi e M. Fortin, "Mixed and Hybrid Finite Element Methods", New-York: Springer, 1991.
- [11] S. Atluri, P. Tong e H. Murakawa, "Recent studies in hybrid and mixed finite element methods in mechanics," em *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, John Wiley & Sons, 1983, pp. 51-71.
- [12] C. Fellip, "Recent developments in parametrized variational principles for mechanics," *Computational Mechanics*, vol. 11, pp. 443-461, 1996.

- [13] J. Freitas, C. Cismasiu e Z. Wang, "Comparative analysis of hybrid-Trefftz stress and displacement elements," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 6, nº 1, pp. 35-59, 1999.
- [14] J. Freitas e C. Cismasiu, "Numerical implementation of hybrid-Trefftz displacement elements," *Computers & Structures*, vol. 73, nº 1-5, pp. 207-225, 1999.
- [15] J. Freitas e F. Bussamra, "Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, nº 5, pp. 927-950, 2000.
- [16] F. Bussamra, P. Pimenta e J. Freitas, "Hybrid-Trefftz stress elements for three-dimensional elastoplasticity," *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, vol. 8, pp. 235-246, 2001.
- [17] J. Freitas e Z. Wang, "Elastodynamic analysis with hybrid stress finite elements," *Computers & Structures*, vol. 79, nº 19, pp. 1753-1767, 2001.
- [18] J. Freitas e C. Cismasiu, "Hybrid-Trefftz displacement element for spectral analysis of bounded and unbounded media," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, nº 3, pp. 671-699, 2003.
- [19] J. Freitas, "Mixed finite element solution of time-dependent problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, nº 45-48, pp. 3657-3678, 2008.
- [20] I. Moldovan, "Hybrid-Trefftz displacement and stress elements for biphasic elastostatics," *Internal Report, Catholic University of Portugal*, 2010.
- [21] I. Moldovan, T. Cao e J. Freitas, "Hybrid-Trefftz finite elements for biphasic elastostatics," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 66, pp. 68-82, 2013.
- [22] J. Freitas e I. Moldovan, "Hybrid-Trefftz stress element for bounded and unbounded poroelastic media.," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 85, nº 10, pp. 1280-1305, 2011.
- [23] J. Freitas, I. Moldovan e C. Cismasiu, "Hybrid-Trefftz displacement element for bounded and unbounded poroelastic media," *Computational Mechanics*, vol. 48, pp. 659-673, 2011.
- [24] J. Freitas, I. Moldovan e M. Toma, "Mixed and hybrid stress elements for biphasic media," *Computers & Structures*, vol. 88, nº 23-24, pp. 1286-1299, 2010.

- [25] I. Babuska e B. Q. Guo, "The h, p and h-p version of the finite element method: basis theory and applications," *Advances in Engineering Software*, vol. 15, nº 3-4, pp. 159-174, 1992.
- [26] A. Jesus, I. Cismasiu e J. Freitas, "Fully automatic p-adaptive hybrid-Trefftz displacement elements," em *Proc. of 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics*, Warsaw, Poland, 2011.
- [27] I. Cismasiu e J. Almeida, "Data structures for the distributed iterative solutions of non-conventional finite element models," *Advances in Engineering Software*, vol. 38, nº 11-12, pp. 750-762, 2007.
- [28] W. Weaver JR., S. P. Timoshenko e D. H. Young, "Vibration Problems in Engineering", John Wiley & Sons, 1990.
- [29] N. Newmark, "A method of computation for structural dynamics," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 85, nº 3, pp. 67-94, 1959.
- [30] K. Bathe e E. Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, 1976.
- [31] R. Cook, D. Malkus, M. Plesha e R. Witt, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", 4ª ed., Wiley, 2002.
- [32] I. Gladwell e R. Thomas, "Stability properties of the Newmark, Houbolt and Wilson  $\theta$  methods," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 4, nº 2, pp. 143-158, 1980.
- [33] B. Galerkin, "On electrical circuits for the approximate solution of the Laplace equation," *VESTNIK-THE JOURNAL OF RUSSIAN AND ASIAN STUDIES*, pp. 897-908, 1915.
- [34] E. Kita e N. Kamiya, "Trefftz method: an overview," *Advances in Engineering Software*, vol. 24, nº 1-3, pp. 3-12, 1995.
- [35] Q. Qin, "The Trefftz Finite and Boundary Element Method", Southampton: WIT Press, 2000.
- [36] I. Babuska e B. Szabo, "On the rates of convergence of the finite element method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 18, nº 3, pp. 323-341, 1982.
- [37] T. Gantumur, "Adaptive boundary element methods with convergence rates," *Numerische Mathematik*, vol. 124, nº 3, pp. 471-516, 2013.

- [38] O. Zienkiewicz, R. Taylor, J. Zhu e P. Nithiarasu, "The Finite Element Method- its Basis and Fundamentals", 6ª ed., Elsevier, 2005.
- [39] O. Zienkiewicz e R. Taylor, "The Finite Element Method: Basic formulation and linear problems", 4ª ed., vol. 1, McGraw-Hill, 1989.
- [40] B. Pluymers, B. Van Hal, D. Vandepitte e W. Desmet, "Trefftz-Based Methods for Time-Harmonic Acoustics," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 14, nº 4, pp. 343-381, 2007.

# Anexo A

## Exemplo de aplicação dos elementos convencionais

Nesta secção é apresentada a resolução do problema representado na Figura A.1 utilizando elementos finitos convencionais, incluindo o cálculo dos elementos do sistema resolutivo, a sua construção e o processo de pós-processamento até à obtenção dos campos de deslocamentos e de tensões. Através deste exemplo, e dos exemplos similares envolvendo elementos híbridos (Anexo B) e híbridos-Trefftz (Anexo C), espera-se facilitar a compreensão pelo leitor das metodologias apresentadas neste trabalho, bem como as suas reprodutibilidade e comparação.

Na Figura A.1 estão representados o domínio do problema, as condições de fronteira e o referencial global escolhido.

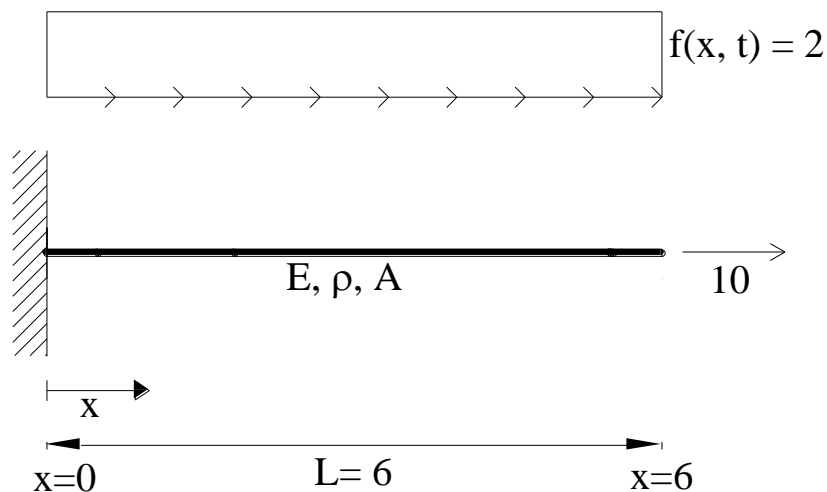


Figura A.1: Exemplo de aplicação

A barra tem um comprimento total de  $L = 6$ , uma área de secção transversal  $A = 1$  e é fabricada de um material com módulo de elasticidade  $E = 1$  e densidade de massa  $\rho =$

1. A barra é fixa em  $x = 0$  ( $u_F = 0$ ) e está sujeita a uma força  $F = 10$  em  $x = 6$  e a uma carga axial de vão constante  $f(x, t) = 2$ . O problema é harmónico, tendo a frequência de vibração  $\omega = 1$ . Todos os dados do problema foram escolhidos de maneira a facilitar o seguimento do processo resolutivo.

O problema analisado tem uma solução exata fácil de se obter. O campo de deslocamentos exato do problema é dado pela seguinte expressão:

$$u(x) = -2 + C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x \quad (\text{A.1})$$

Para se obter os valores das constantes recorre-se às condições de fronteira do problema:

- Em  $x=0$  tem-se que,

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow -2 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 2 \quad (\text{A.2})$$

- Em  $x=6$ , a condição de fronteira escreve-se,

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=6} = 10 \Leftrightarrow -2 \cdot \sin 6 + C_2 \cdot \cos 6 = 10 \Leftrightarrow C_2 = 9,83 \quad (\text{A.3})$$

Visto isto, os campos de deslocamentos e de tensões analíticos são dados, respetivamente, pelas expressões (A.4) e (A.5) e estão representados na Figura A.2.

$$u(x) = -2 + 2 \cdot \cos x + 9,83 \cdot \sin x \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma(x) = -2 \cdot \sin x + 9,83 \cdot \cos x \quad (\text{A.5})$$

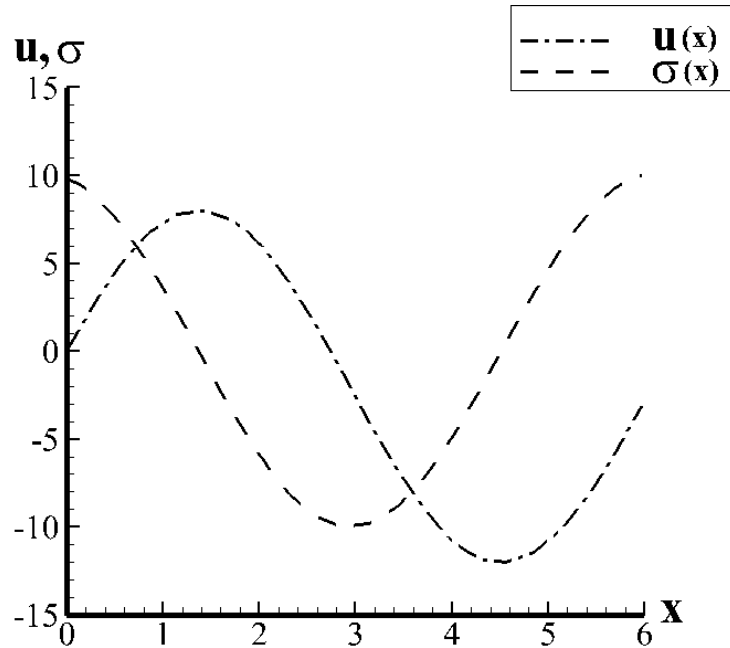


Figura A.2: Campos de deslocamentos e tensões analíticos



De seguida, são determinados os campos de deslocamentos e de tensões na barra utilizando os elementos finitos convencionais. Para realizar isso, a estrutura é dividida em três elementos finitos como se pode ver na Figura A.3.

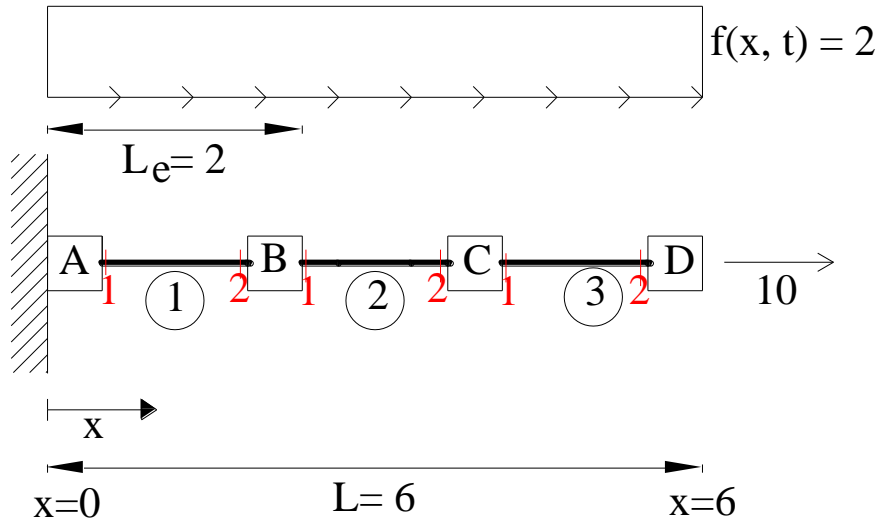


Figura A.3: Discretização em elementos finitos

Como foi visto no Capítulo 3, as funções de aproximação relativas ao elemento convencional são:

$$\Psi(x) = \left[ 1 - \frac{x}{L_e} \quad \frac{x}{L_e} \right] \quad (\text{A.6})$$

Então, temos que:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \left[ -\frac{1}{L_e} \quad \frac{1}{L_e} \right] = \frac{1}{L_e} \cdot [-1 \quad 1] = \frac{1}{2} \cdot [-1 \quad 1] \quad (\text{A.7})$$

o que permite calcular as matrizes de massa e de rigidez ao nível do elemento através da definição (3.49):

$$\mathbf{K}_e = \int_0^{L_e} \frac{1}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{L_e} \cdot [-1 \quad 1] dx = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{M}_e = \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L_e} \\ \frac{x}{L_e} \end{bmatrix} \cdot \rho \cdot \left[ 1 - \frac{x}{L_e} \quad \frac{x}{L_e} \right] dx = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Para exemplificar a construção das matrizes globais de rigidez e massa, os termos das matrizes  $\mathbf{K}_e$  e  $\mathbf{M}_e$  denotam-se por  $K_{ij}$  e  $M_{ij}$ ,  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Nos elementos finitos convencionais, as matrizes globais de rigidez e de massa são obtidas somando os termos das matrizes elementares que correspondem aos nós comuns aos vários elementos (ver Secção 3.3.3). Por isso, as matrizes globais de rigidez e de massa têm dimensão igual ao número total de nós existentes na barra:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{matrix} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{A} & & & & \\ \mathbf{B} & & & & \\ \mathbf{C} & & & & \\ \mathbf{D} & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^2 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{matrix} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{A} & & & & \\ \mathbf{B} & & & & \\ \mathbf{C} & & & & \\ \mathbf{D} & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} M_{11}^1 & M_{12}^1 & 0 & 0 \\ M_{21}^2 & M_{22}^1 + M_{11}^2 & M_{12}^2 & 0 \\ 0 & M_{21}^2 & M_{22}^2 + M_{11}^3 & M_{12}^3 \\ 0 & 0 & M_{21}^3 & M_{22}^3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Nas equações (A.11) e (A.12), os números sobrescritos denotam os elementos aos quais pertencem os termos das matrizes.

A matriz dinâmica  $\mathbf{D} = (\mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M})$  fica então:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1/6 & -5/6 & 0 & 0 \\ -5/6 & -1/3 & -5/6 & 0 \\ 0 & -5/6 & -1/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & -5/6 & -1/6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Para simular a ação da carga de vão a que a barra está sujeita, a mesma tem de ser discretizada, ou seja, reduzida aos nós do elemento. A carga de vão discretizada para o elemento  $e$  é dada por:

$$\mathbf{B}^e = \int_0^{L_e} \boldsymbol{\Psi}(x)^T \cdot b^e(x) dx = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

e é a mesma para todos os elementos. Assim, o vetor global das forças de vão é dado por:

$$\mathbf{B}_{global} = \begin{bmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 + B_1^2 \\ B_2^2 + B_1^3 \\ B_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Por fim, resta ainda determinar o vetor das tensões aplicadas nos nós dos elementos, que se vai notar por  $\mathbf{T}^e$ . Caso não exista nenhuma tensão aplicada no nó, o termo  $T_j^e$  correspondente tem valor nulo. Logo, o vetor global das tensões aplicadas é dado por:

$$\mathbf{T}_{global} = \begin{bmatrix} -\sigma_0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

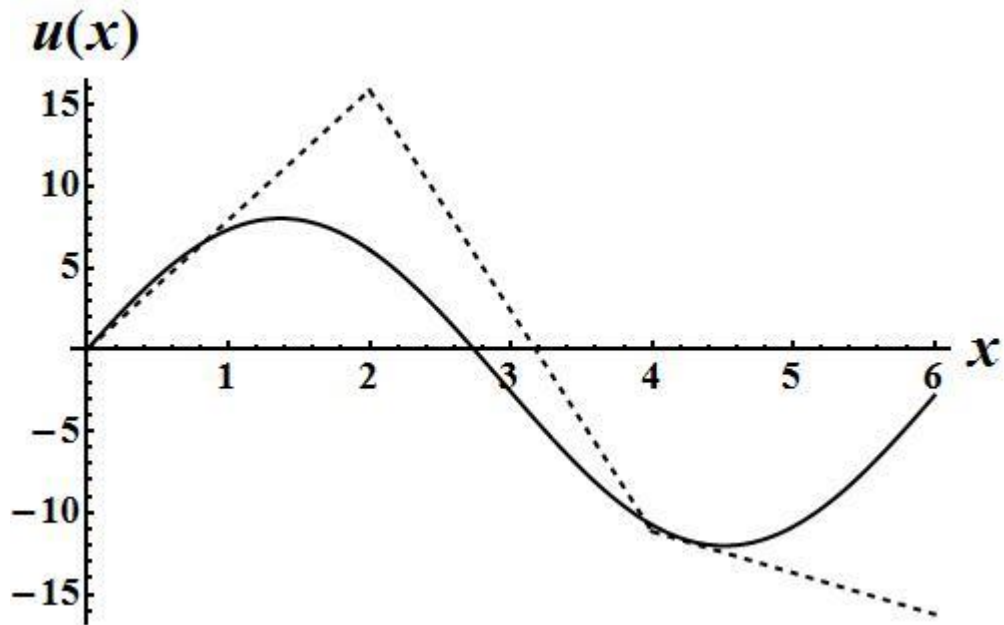
Pela equação (3.51), o sistema global escreve-se:

$$\begin{bmatrix} -1/6 & -5/6 & 0 & 0 \\ -5/6 & -1/3 & -5/6 & 0 \\ 0 & -5/6 & -1/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & -5/6 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_B \\ u_C \\ u_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_0 + 2 \\ 4 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

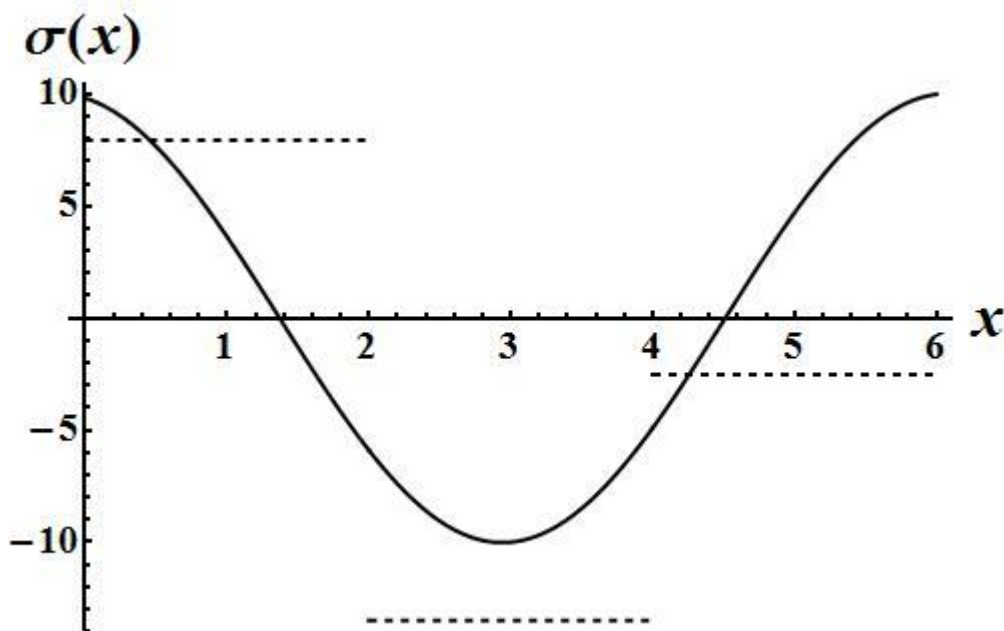
Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$u_B = 15,89, \quad u_C = -11,16, \quad u_D = 16,23, \quad \sigma_0 = 15,24$$

Na Figura A.4 encontram-se representados os campos de deslocamentos e tensões aproximados (à tracejado) e analíticos (linha contínua) da estrutura, obtidos pelas aproximações (3.33) e (3.35), onde o vetor  $\mathbf{q}$  é dado pelas soluções do sistema (A.17).



a) Campo dos deslocamentos



b) Campo das tensões

Figura A.4: Soluções aproximadas e exatas utilizando elementos convencionais

## Anexo B

# Exemplo de aplicação dos elementos híbridos

A estrutura representada na Figura A.1 do anexo A é agora analisada utilizando elementos finitos híbridos com bases construídas utilizando monômios de grau  $n$  ( $x^n$ ). Mantêm-se todas as considerações feitas sobre a estrutura, bem como a discretização representada na Figura A.3.

A base no domínio de todos os elementos é construída utilizando funções de aproximação do segundo grau:

$$\Psi = [1 \quad x \quad x^2] \quad (\text{B.1})$$

Pela definição (3.49), as matrizes de massa e de rigidez ao nível do elemento são dadas, respetivamente, por:

$$K_e = \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \end{bmatrix} \cdot E \cdot [0 \quad 1 \quad 2x] dx = E \cdot L_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_e \\ 0 & L_e & \frac{4}{3} \cdot L_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & \frac{32}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$M_e = \int_0^{L_e} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \cdot \rho \cdot [1 \quad x \quad x^2] dx = \rho \cdot L_e \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{3} \\ \frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{3} & \frac{L_e^3}{4} \\ \frac{L_e^2}{3} & \frac{L_e^3}{4} & \frac{L_e^4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 8/3 & 4 \\ 8/3 & 4 & 32/5 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

A matriz dinâmica fica então:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= L \cdot \begin{bmatrix} -\omega^2 \cdot \rho & -\omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{L_e}{2} & -\omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{L_e^2}{3} \\ -\omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{L_e}{2} & E \cdot L_e - \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{L_e^2}{3} & E \cdot L_e - \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{L_e^3}{4} \\ -\omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{L_e^2}{3} & E \cdot L_e - \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{L_e^3}{4} & \frac{4}{3} \cdot E \cdot L_e^2 - \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{L_e^4}{5} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -8/3 \\ -2 & -2/3 & 0 \\ -8/3 & 0 & \frac{64}{15} \end{bmatrix} \quad (B.4)
\end{aligned}$$

O vetor das cargas de vão para os elementos finitos híbridos com polinómios de segundo grau é dado por:

$$\mathbf{B} = \int_0^{L_e} \boldsymbol{\Psi}^T(x) \cdot b(x) dx = \int_0^2 \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \cdot 2 dx = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 16/3 \end{bmatrix} \quad (B.5)$$

O termo  $\mathbf{F}_0$  do sistema de equações (3.54) é nulo por se tratar de um problema harmónico. Por estar aplicada uma tensão no nó D, no vetor das tensões generalizadas do elemento 3, vai ser somado o termo,

$$\boldsymbol{\Psi}^T(L_e) \cdot \sigma_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot 10 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix} \quad (B.6)$$

O sistema de equações (3.54) é construído juntando as seguintes equações de equilíbrio:

- Elemento 1 (duas fronteiras do tipo Dirichlet):

$$\mathbf{D}^1 \cdot \mathbf{q}^1 - (-1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^1}(0) \cdot \sigma_A - (1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^1}(L_e) \cdot \sigma_B = \mathbf{B}^1 \quad (B.7)$$

- Elemento 2 (duas fronteiras do tipo Dirichlet):

$$\mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{q}^2 - (-1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^2}(0) \cdot \sigma_B - (1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^2}(L_e) \cdot \sigma_C = \mathbf{B}^2 \quad (B.8)$$

- Elemento 3 (uma fronteira do tipo Dirichlet e uma fronteira do tipo Neumann):

$$\mathbf{D}^3 \cdot \mathbf{q}^3 - (-1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^3}(0) \cdot \sigma_C = (1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^3}(L_e) \cdot \sigma_\Gamma + \mathbf{B}^3 \quad (B.9)$$

Nas fronteiras de Dirichlet e interiores devem ser impostas as respetivas condições de compatibilidade, nomeadamente,

- Para o nó A:  $u_\Gamma = \boldsymbol{\Psi}^1(0) \cdot \mathbf{q}^1 = 0$  (B.10)

- Para o nó B:  $\boldsymbol{\Psi}^1(L_e) \cdot \mathbf{q}^1 - \boldsymbol{\Psi}^2(0) \cdot \mathbf{q}^2 = 0$  (B.11)

- Para o nó C:  $\boldsymbol{\Psi}^2(L_e) \cdot \mathbf{q}^2 - \boldsymbol{\Psi}^3(0) \cdot \mathbf{q}^3 = 0$  (B.12)

O sistema resolutivo global (3.54) do método dos elementos finitos híbridos é obtido juntando as equações (B.7) a (B.12):

$$\begin{bmatrix}
-2 & -2 & -8/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
-2 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
-8/3 & 0 & 64/15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -8/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & -8/3 & 0 & 64/15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -8/3 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8/3 & 0 & 64/15 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
q_1^1 \\
q_2^1 \\
q_3^1 \\
q_1^2 \\
q_2^2 \\
q_3^2 \\
q_1^3 \\
q_2^3 \\
q_3^3 \\
\sigma_A \\
\sigma_B \\
\sigma_C
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
4 \\
4 \\
16/3 \\
4 \\
4 \\
16/3 \\
14 \\
24 \\
136/3 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\tag{B.13}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix}
q_1^1 \\
q_2^1 \\
q_3^1 \\
q_1^2 \\
q_2^2 \\
q_3^2 \\
q_1^3 \\
q_2^3 \\
q_3^3 \\
\sigma_A \\
\sigma_B \\
\sigma_C
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0. \\
11.4576 \\
-4.2055 \\
6.0932 \\
-8.6017 \\
0.15889 \\
-10.4746 \\
-4.5763 \\
4.0784 \\
9.8814 \\
-5.8192 \\
-5.2259
\end{bmatrix}$$

Na Figura B.1 encontram-se representados os campos de deslocamentos e tensões aproximados e analíticos na barra, obtidos pelas aproximações (3.33) e (3.35), onde o vetor  $\mathbf{q}$  é dado pelas soluções do sistema (B.13).

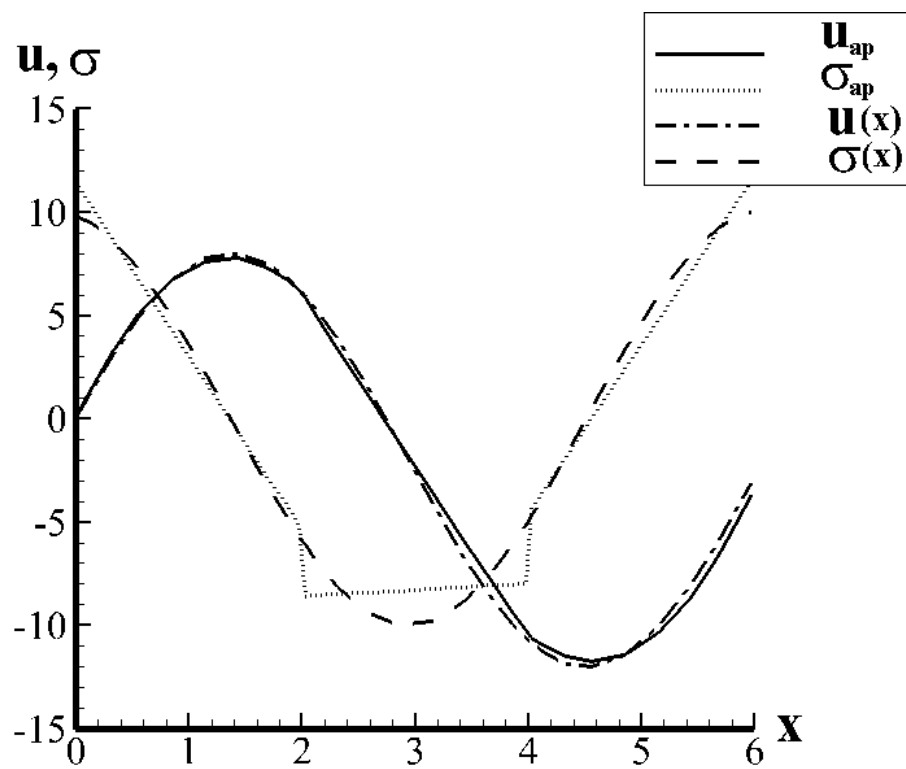


Figura B.1: Deslocamentos e tensões utilizando elementos finitos híbridos



## Anexo C

### Exemplo de aplicação dos elementos híbridos-Trefftz

O problema descrito na Figura A.1 do anexo A é agora resolvido utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz. A base de aproximação utilizada possui uma parcela para modelar a solução particular e outra para modelar a solução complementar. Como já mencionado na Secção 3.3.5, os elementos finitos híbridos-Trefftz usam bases de aproximação construídas com polinómios de Chebyshev para aproximar a solução particular. Para este problema, essas são construídas, para todos os elementos, com polinómios do segundo grau. Por sua vez, a solução complementar constrói-se utilizando as funções de Trefftz (3.62).

Consequente da aplicação do método de Gauss ao cálculo dos integrais que definem as matrizes de massa e rigidez (Secção 4.3.1), todos os cálculos são efetuados no referencial das abcissas,  $a \in [-1,1]$ . Então, as funções de aproximação na base do domínio são dadas por:

$$\Psi = [1 \quad a \quad 2 \cdot a^2 - 1 \quad \sin(\alpha \cdot a) \quad \cos(\alpha \cdot a)] \quad (C.1)$$

sendo  $\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \frac{L_e}{2} = 1$ .

As matrizes de massa e de rigidez ao nível do elemento são dadas, respetivamente, por:

$$\begin{aligned} K_e &= \frac{2}{L_e} \cdot E \cdot \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \cdot a \\ \cos(a) \\ -\sin(a) \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 1 \quad 4 \cdot a \quad \cos(a) \quad -\sin(a)] da = \\ &= \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2. & 0. & 1.683 & 0. \\ 0. & 0. & 10.667 & 0. & -2.409 \\ 0. & 1.683 & 0. & 1.455 & 0. \\ 0. & 0. & -2.409 & 0. & 0.545 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_e &= \frac{L_e}{2} \cdot \rho \cdot \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \cdot a^2 - 1 \\ \sin(a) \\ \cos(a) \end{bmatrix} \cdot [1 \quad a \quad 2 \cdot a^2 - 1 \quad \sin(a) \quad \cos(a)] da = \\
&= \begin{bmatrix} 2. & 0. & -0.667 & 0. & 1.683 \\ 0. & 0.667 & 0. & 0.602 & 0. \\ -0.667 & 0. & 0.933 & 0. & -0.726 \\ 0. & 0.602 & 0. & 0.545 & 0. \\ 1.683 & 0. & -0.726 & 0. & 1.455 \end{bmatrix} \quad (C.3)
\end{aligned}$$

A matriz dinâmica fica então, para cada elemento,

$$\mathbf{D} = (\mathbf{K}_e - \omega^2 \cdot \mathbf{M}_e) = \begin{bmatrix} -2. & 0. & 0.667 & 0. & -1.683 \\ 0. & 1.333 & 0. & 1.081 & 0. \\ 0.667 & 0. & 9.733 & 0. & -1.683 \\ 0. & 1.081 & 0. & 0.909 & 0. \\ -1.683 & 0. & -1.683 & 0. & -0.909 \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

O vetor das cargas de vão para os elementos finitos híbridos-Trefftz é dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \cdot L_e \cdot \int_{-1}^1 \boldsymbol{\Psi}^T(a) \cdot b(a) da = \frac{2}{2} \cdot \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \cdot a^2 - 1 \\ \sin(a) \\ \cos(a) \end{bmatrix} \cdot 2 da = \begin{bmatrix} 4. \\ 0. \\ -1.333 \\ 0. \\ 3.366 \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

Por estar aplicada uma tensão no nó D, no vetor das tensões generalizadas do elemento 3, é somado o termo,

$$\boldsymbol{\Psi}^T(1) \cdot \sigma_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \cdot 1^2 - 1 \\ \sin(1) \\ \cos(1) \end{bmatrix} \cdot 10 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 8.4147 \\ 5.4030 \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

O sistema de equações (3.54) é construído juntando as seguintes equações nos domínios dos três elementos:

- Elemento 1 (duas fronteiras do tipo Dirichlet):

$$\mathbf{D}^1 \cdot \mathbf{q}^1 - (-1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^1}(-1) \cdot \sigma_A - (1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^1}(1) \cdot \sigma_B = \mathbf{B}^1 \quad (C.7)$$

- Elemento 2 (duas fronteiras do tipo Dirichlet):

$$\mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{q}^2 - (-1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^2}(-1) \cdot \sigma_B - (1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^2}(1) \cdot \sigma_C = \mathbf{B}^2 \quad (C.8)$$

- Elemento 3 (uma fronteira do tipo Dirichlet e uma fronteira do tipo Neumann):

$$\mathbf{D}^3 \cdot \mathbf{q}^3 - (-1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^3}(-1) \cdot \sigma_C = (1) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{T^3}(1) \cdot \sigma_r + \mathbf{B}^3 \quad (C.9)$$

e ainda as condições de compatibilidade nas fronteiras de Dirichlet e inter-elementares,

- Para o nó A:  $u_\Gamma = \boldsymbol{\Psi}^1(-1) \cdot \mathbf{q}^1 = 0$  (C.10)

- Para o nó B:  $\boldsymbol{\Psi}^1(1) \cdot \mathbf{q}^1 - \boldsymbol{\Psi}^2(-1) \cdot \mathbf{q}^2 = 0$  (C.11)

- Para o nó C:  $\boldsymbol{\Psi}^2(1) \cdot \mathbf{q}^2 - \boldsymbol{\Psi}^3(-1) \cdot \mathbf{q}^3 = 0$  (C.12)

O sistema resolutivo global (3.54) tem a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix}
 -2. & 0. & 0.667 & 0. & -1.683 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0. & 1.333 & 0. & 1.081 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
 0.667 & 0. & 9.733 & 0. & -1.683 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
 0. & 1.081 & 0. & 0.909 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8415 & -0.8415 & 0 \\
 -1.683 & 0. & -1.683 & 0. & -0.909 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5403 & -0.5403 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2. & 0. & 0.667 & 0. & -1.683 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. & 1.333 & 0. & 1.081 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.667 & 0. & 9.733 & 0. & -1.683 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. & 1.081 & 0. & 0.909 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8415 & -0.8415 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.683 & 0. & -1.683 & 0. & -0.909 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5403 & -0.5403 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2. & 0. & 0.667 & 0. & -1.683 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. & 1.333 & 0. & 1.081 & 0. & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.667 & 0. & 9.733 & 0. & -1.683 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.081 & 0. & 0.909 & 0. & 0 & 0 & -0.8415 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.683 & 0. & -1.683 & 0. & -0.909 & 0 & 0 & 0.5403 \\
 1 & -1 & 1 & -0.8415 & 0.5403 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & -1 & -1 & -0.8415 & -0.5403 & 1 & -1 & 1 & -0.8415 & 0.5403 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -0.8415 & -0.5403 & 1 & -1 & 1 & -0.8415 & 0.5403 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \\ q_4^1 \\ q_5^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \\ q_5^2 \\ q_1^3 \\ q_2^3 \\ q_3^3 \\ q_4^3 \\ q_5^3 \\ \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4. \\ 0 \\ -4/3 \\ 0 \\ 3.36588 \\ 4 \\ 0 \\ -4/3 \\ 0 \\ 3.36588 \\ 14 \\ 10 \\ 8.66667 \\ 8.4147098 \\ 8.7689 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.13)$$

Resolvendo o sistema (C.13), obtém-se o seguinte vetor das soluções:

$$\begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \\ q_4^1 \\ q_5^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \\ q_5^2 \\ q_1^3 \\ q_2^3 \\ q_3^3 \\ q_4^3 \\ q_5^3 \\ \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.997 \\ 0 \\ -0.0008 \\ 3.6297 \\ 9.3509 \\ -1.997 \\ 0 \\ -0.0008 \\ -10.0166 \\ -0.5960 \\ -1.996 \\ 0 \\ -0.0013 \\ 4.7070 \\ -8.8674 \\ 9.8328 \\ -5.9105 \\ -4.9135 \end{bmatrix}$$

Na Figura C.1 encontram-se representados os campos de deslocamentos e tensões aproximados e analíticos na barra obtidos utilizando as definições (3.33) e (4.18), e as soluções do sistema (C.13).

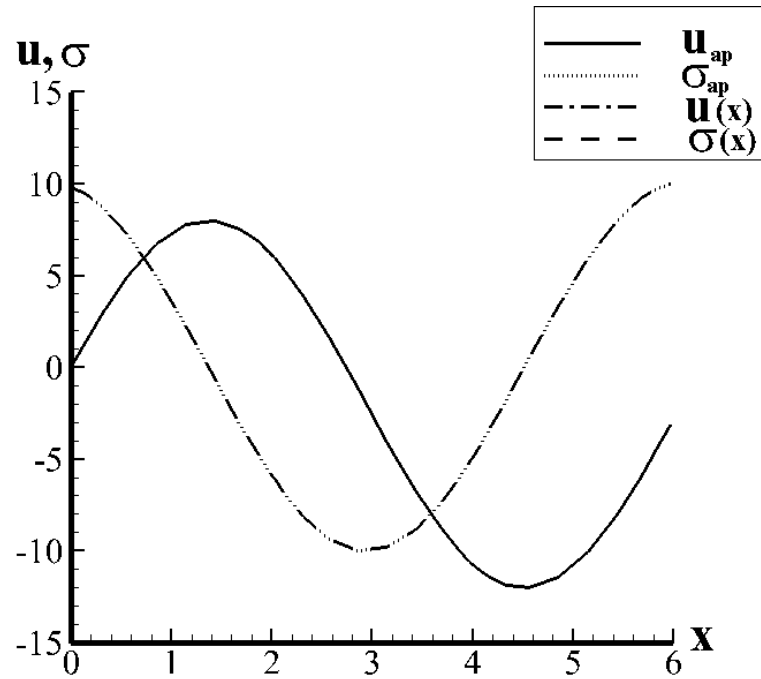


Figura C.1: Deslocamentos e tensões utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz